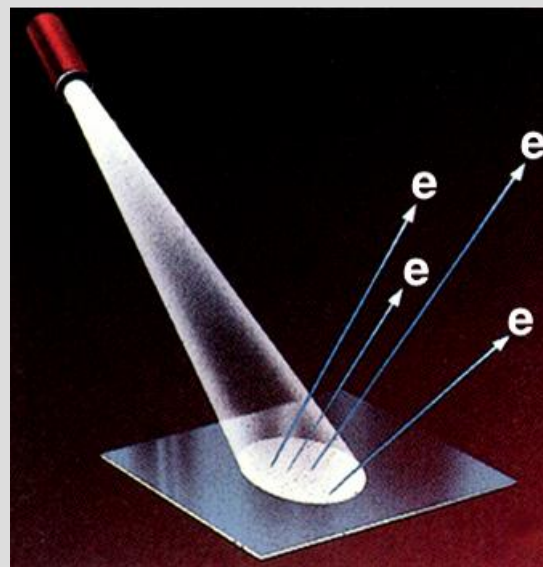


# Wykład II

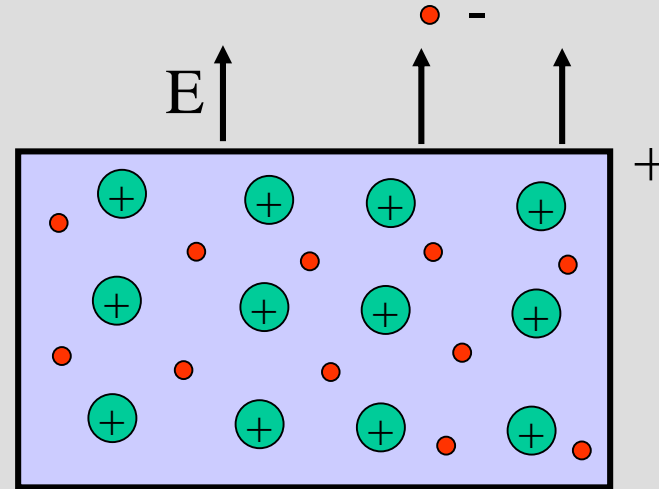
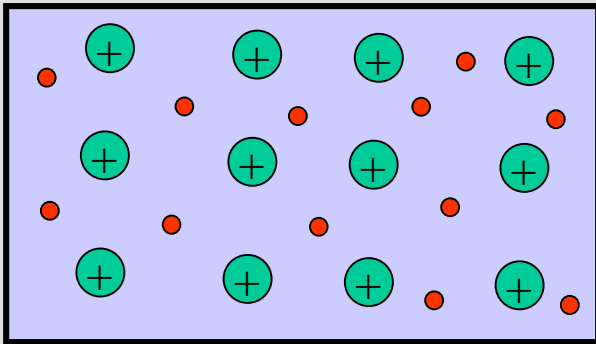
- Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne
- Promieniowanie rentgenowskie
- Efekt Comptona

# Efekt fotoelektryczny



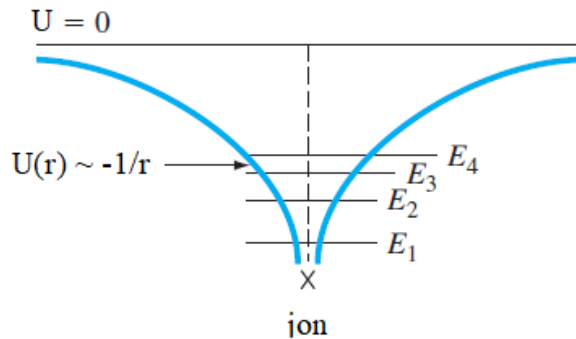
# Efekt fotoelektryczny I

$$Q = 0$$

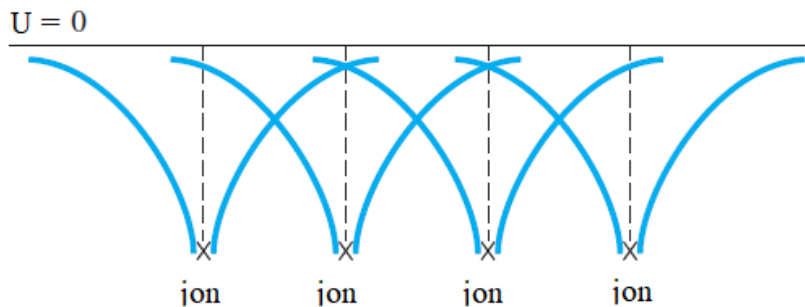


Aby elektron mógł opuścić metal należy dostarczyć mu pewną minimalną wartość energii którą nazywamy **pracą wyjścia**. Energia ta może być uzyskana np. poprzez absorpcję energii fali elektromagnetycznej. Dla większości metali wartość pracy wyjścia jest bliska 4 eV.

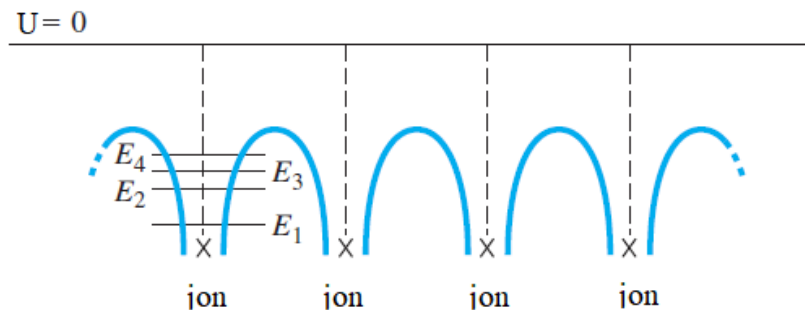
# Energia potencjalna łańcucha monoatomowego



**Energia potencjalna elektronu w izolowanym atomie**

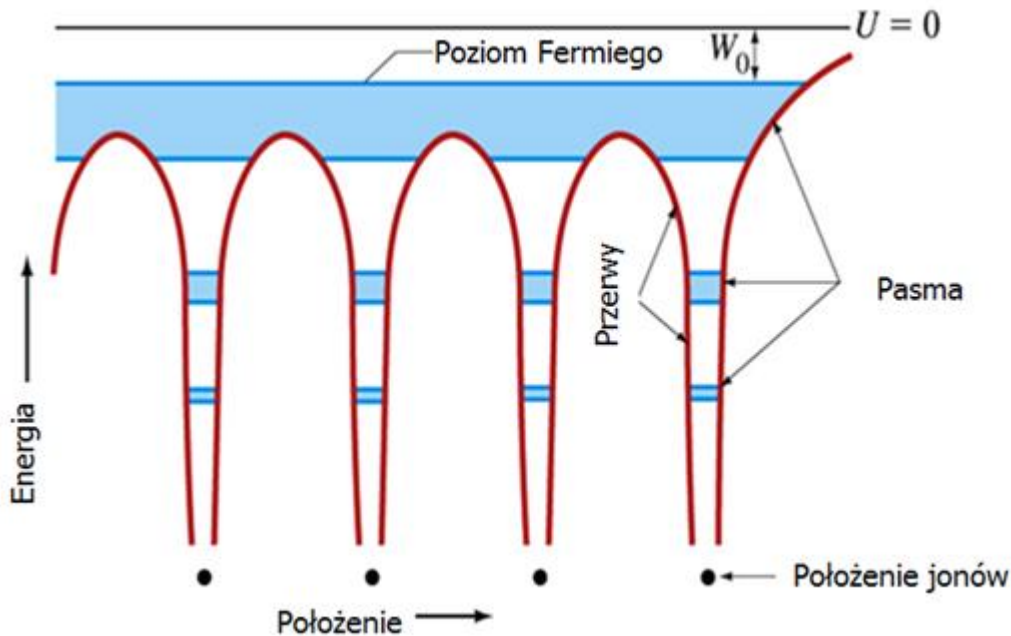


**Przekrycie energii potencjalnej elektronu w kryształcie jednowymiarowym**



**Wypadkowa energia potencjalna elektronu w kryształcie jednowymiarowym**

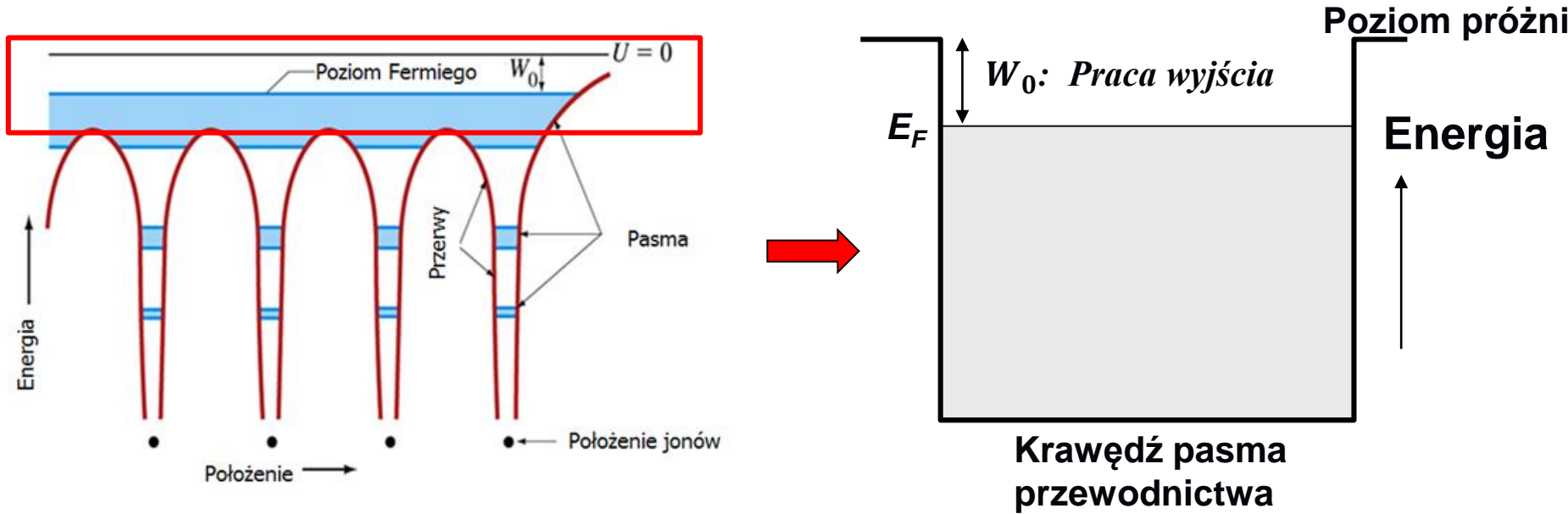
# Model elektronów swobodnych w metalu



$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3}{\pi} n \right)^{2/3}$$

- Dla  $T = 0$ , wszystkie stany o energii poniżej energii Fermiego  $E_F$  są wypełnione elektronami, a wszystkie o energiach powyżej  $E_F$  są puste.
- Dowolnie małe pole elektryczne może wprowadzić w ruch elektrony z poziomu  $E_F$  dostarczając im energii  $\Delta U = eEx$  prowadząc do bardzo dużego przewodnictwa elektrycznego.
- W temperaturach  $T > 0$ , elektrony są termicznie wzbudzone do stanów o energiach powyżej energii Fermiego.

# Parametry Fermiego dla el. swob. w metalu



$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3}{\pi} n \right)^{2/3}$$

metal	Koncentracja elektronów [10 <sup>28</sup> m <sup>-3</sup> ]	Energia Fermiego E <sub>F</sub> [eV]	Praca wyjścia W [eV]
Na	2.65	3.24	2.35
Cu	8.47	7.00	4.44
Ag	5.86	5.49	4.3
Au	5.90	5.53	4.3
Fe	17.0	11.1	4.31
Al	18.1	11.7	4.25
Sn	14.8	10.2	4.38

# Efekt fotoelektryczny - foton

$$E_f = hf = \frac{h}{\lambda} c$$

$$\lambda = \frac{h}{E_f} c$$

stała Plancka

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

prędkość światła

$$c = 3 \cdot 10^8 m/s$$

$$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

**Jeśli energia fotonu jest wyrażona w eV to długość fali (w nm) jest równa:**

$$\lambda(nm) = \frac{1240}{E_f(eV)}$$

$$\lambda(nm) = \frac{1240}{4eV} = 310nm \quad \longrightarrow \quad \text{ultrafiolet}$$

# Efekt fotoelektryczny

Przewidywania modelu falowego:

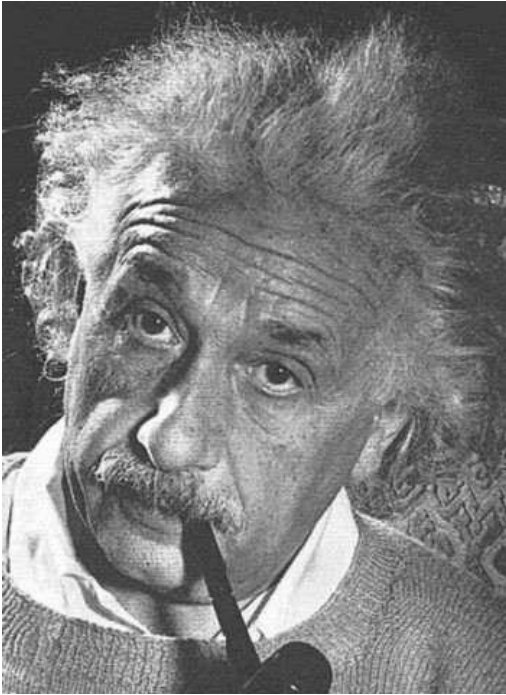
-Dla odpowiednio dużego natężenia oświetlenia fala elektromagnetyczna o dowolnej długości powinna wywołać fotoefekt.

***Własność nie obserwowana***

-Maksymalna energia kinetyczna emitowanych elektronów powinna zależeć jedynie od natężenia oświetlenia.

***Własność nie obserwowana***

- **Fotoefekt występuje dla fali o częstotliwości powyżej pewnej granicznej, zależnej od rodzaju fotokatody (pracy wyjścia).**
- **Maksymalna energia kinetyczna elektronów jest proporcjonalna do częstotliwości fali.**



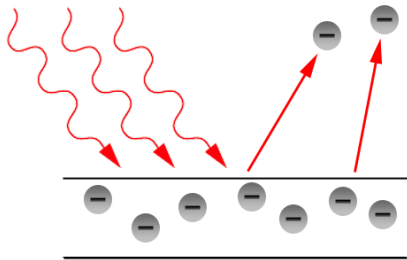
Einstein 1905, Nobel 1921

# Efekt fotoelektryczny

- Fala elektromagnetyczna o częstotliwości  $f$  jest strumieniem fotonów, z których każdy posiada energię  $E=hf$
- Równanie opisujące efekt fotoelektryczny

$$hf = W + K_{max}$$

gdzie  $W$  – praca wyjścia elektronu,  $K_{max}$  – maksymalna energia kinetyczna elektronów

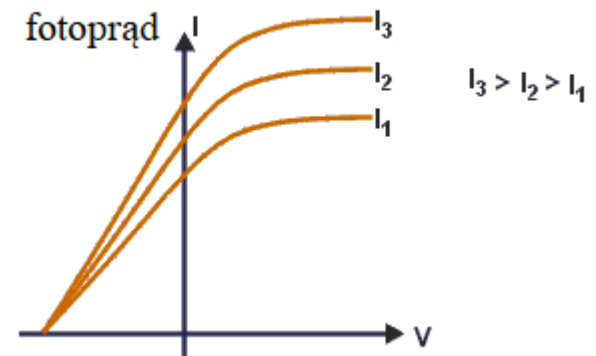
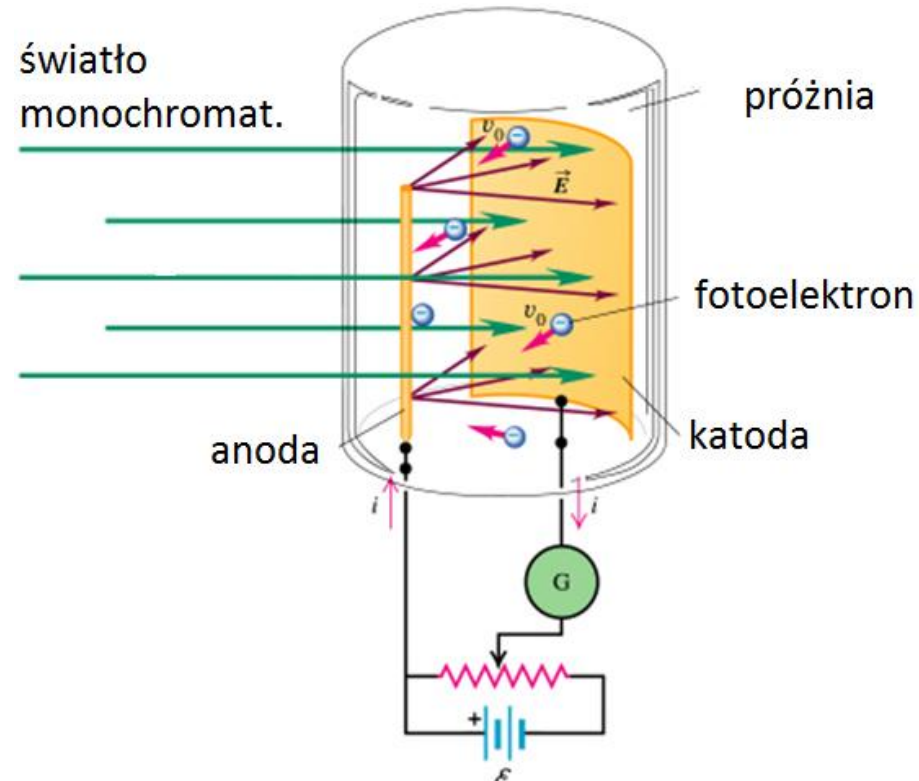


W wyniku absorpcji fotonu, elektron uzyskuje energię  $E = hf$ . Jeżeli energia ta jest większa od pracy wyjścia  $W$ , elektron może opuścić powierzchnię fotokatody.

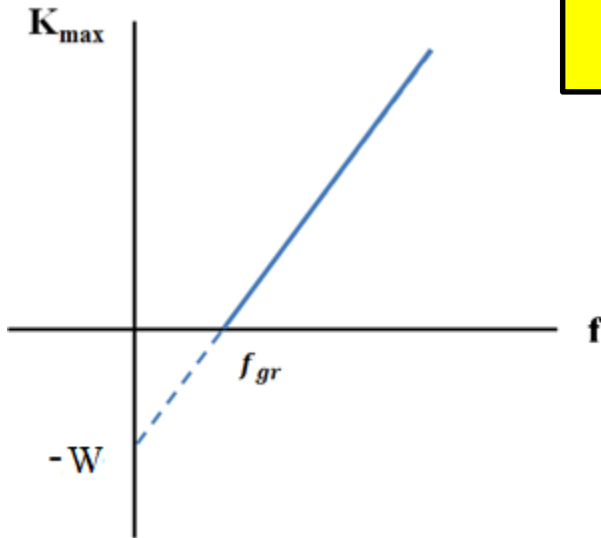
# Efekt fotoelektryczny

$$hf = W + K_{max}$$

- W wyniku absorpcji fotonu, elektron uzyskuje energię  $E=hf$ . Jeżeli energia ta jest większa od pracy wyjścia  $W$ , elektron może opuścić powierzchnię katody. Jeśli dotrze do anody w układzie płynie prąd.
- Wraz ze wzrostem natężenia oświetlenia powierzchni katody (tzn. wzrostem ilości fotonów padających w jednostce czasu na jednostkę powierzchni katody) rośnie ilość elektronów emitowanych z powierzchni, a tym samym natężenie prądu nasycenia.



# Efekt fotoelektryczny



$$hf = K_{max} + W$$

$$K_{max} = hf - W$$

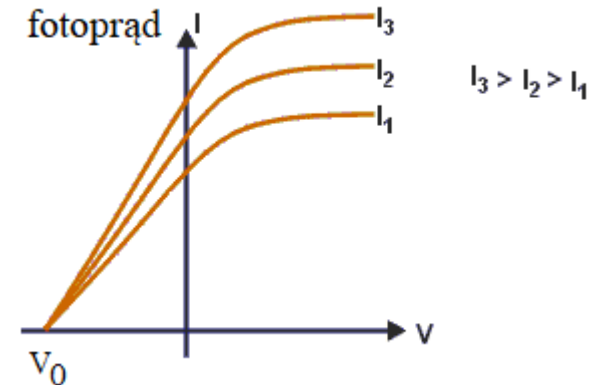
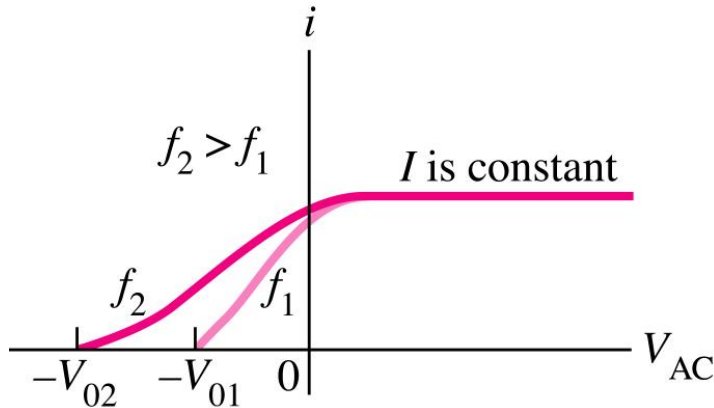
- Maksymalna energia kinetyczna elektronów jest proporcjonalna do częstotliwości fali.
- Fotoefekt występuje dla fali o częstotliwości powyżej pewnej granicznej, zależnej od rodzaju fotokatody (pracy wyjścia)

$$hf_{gr} > W$$

- Zauważmy, że z ekstrapolacji wykresu  $K_{max}(f)$  do przecięcia z osią  $K_{max}$  można wyznaczyć pracę wyjścia  $W$ .

# Efekt fotoelektryczny

$$K_{max} = hf - W$$



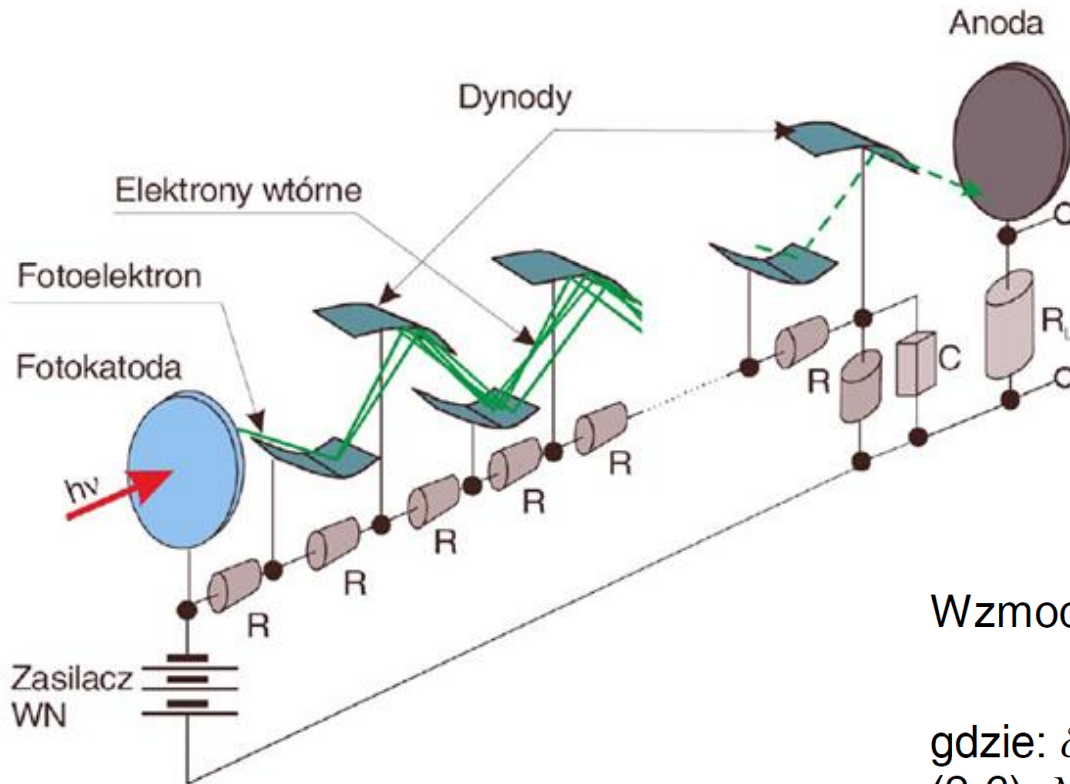
- Różnicę energii pomiędzy energią fotonu a pracą wyjścia elektron unosi w postaci energii kinetycznej. Maksymalna energia kinetyczna zależy liniowo od częstotliwości fali. Aby zahamować elektron potrzebne jest napięcie, tym większe im większa jest częstotliwość fali.

$$eV_0 = K_{max} = hf - W$$

- Napięcie hamowania nie zależy od natężenia oświetlenia

# Detektory fotoemisyjne

## Fotopowielacze



Wzmocnienie prądowe

$$M = \delta^N,$$

gdzie:  $\delta$  jest wzmocnieniem każdej dynody (2-6),  $N$  jest liczbą dynod.

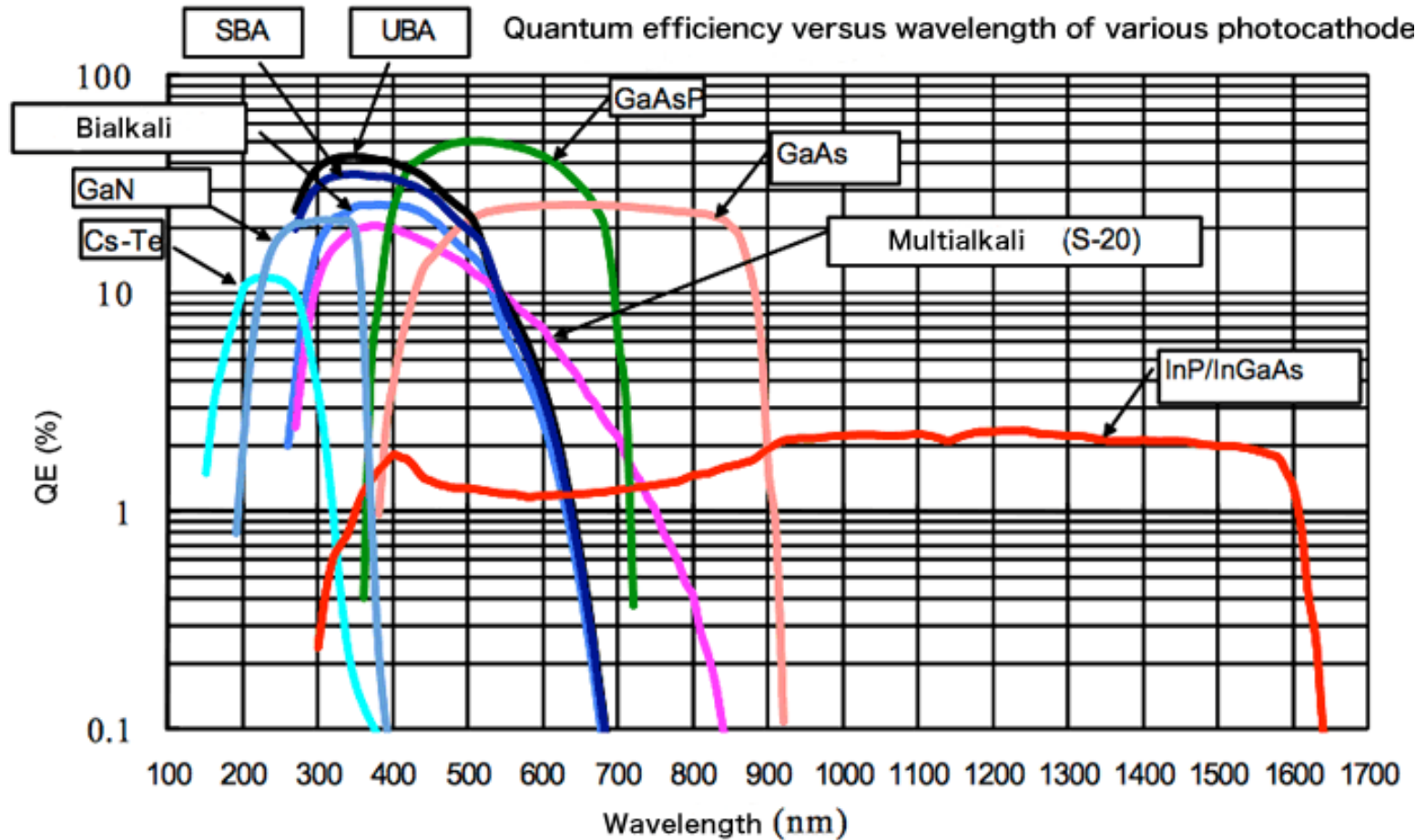
$$P_{\min} = \frac{2h\nu}{\eta} \sqrt{\frac{\bar{i}_d \Delta f}{e}}.$$

Dla typowych (ale dobrych) fotopowielaczy:  
 $10^{-15} - 10^{-16} \text{ W}$ .

# Fotopowielacze Hamamatsu



# Fotokatody



**Multialkaliczne (Na-K-Sb-Cs), S-20**

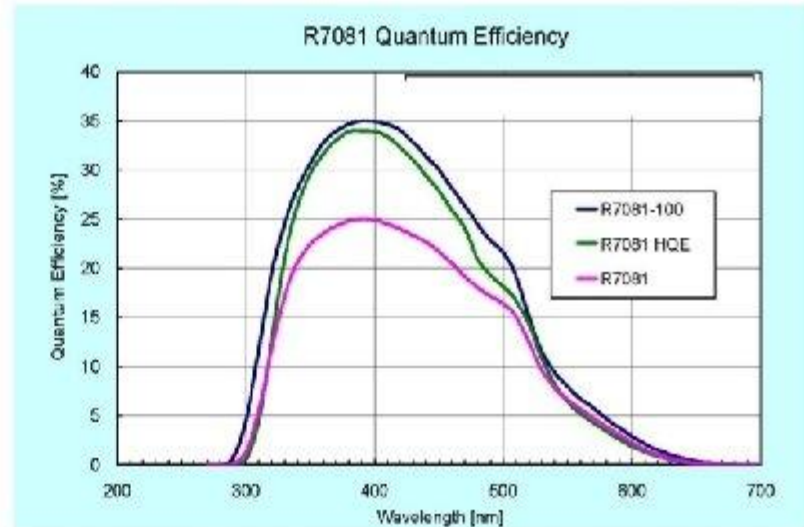
**Bialkaliczne (Na-K-Sb, Sb-Rb-Cs, Sb-K-Cs)**

**Wydajność kwantowa (ang. Quantum Efficiency): stosunek liczby elektronów do liczby fotonów.**

# Fotopowielacz z fotokatodą SBA (superbialcalic)

## The Photomultiplier

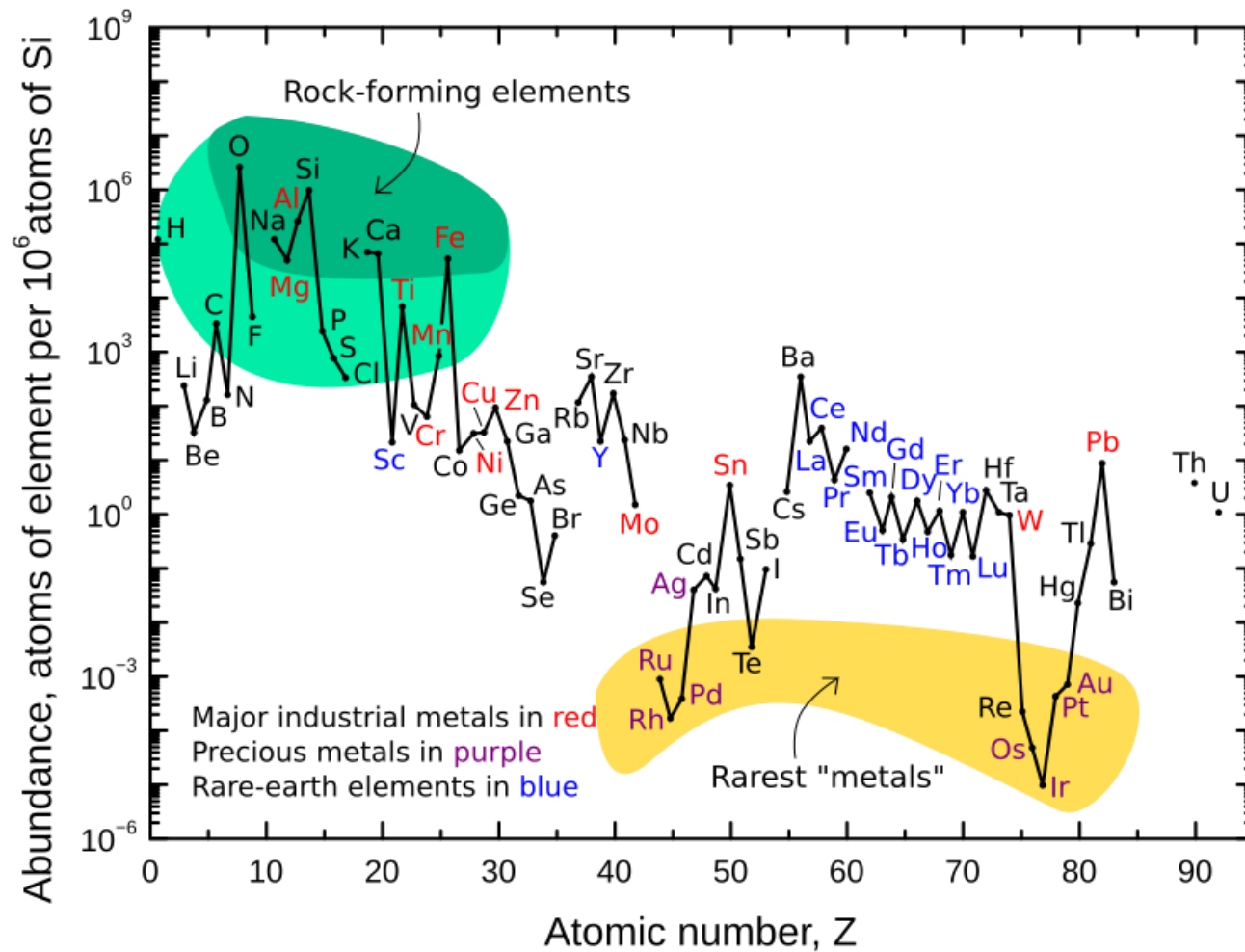
R 7081-100 from Hamamatsu



$\varnothing=10$  inch

SBA photocathode, QE  $\approx$  35% @ 400nm

Gain  $\sim 10^7$ , dark current  $\sim 8$  kHz



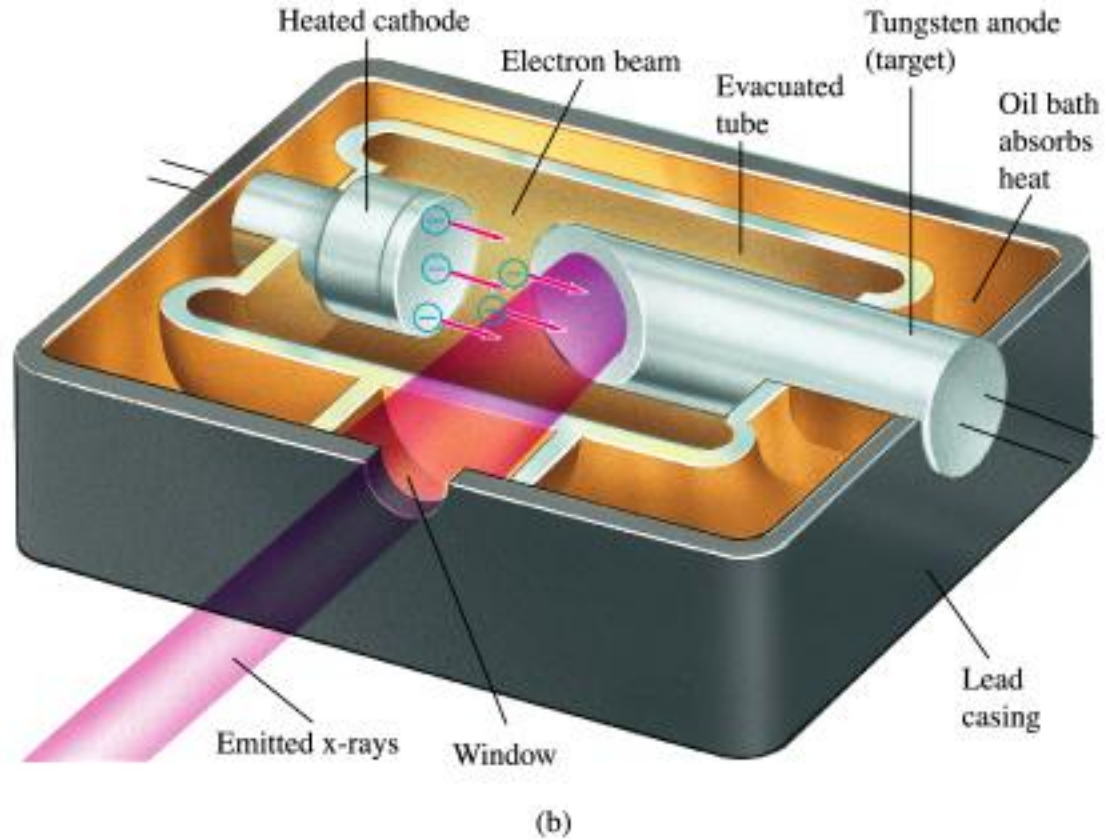
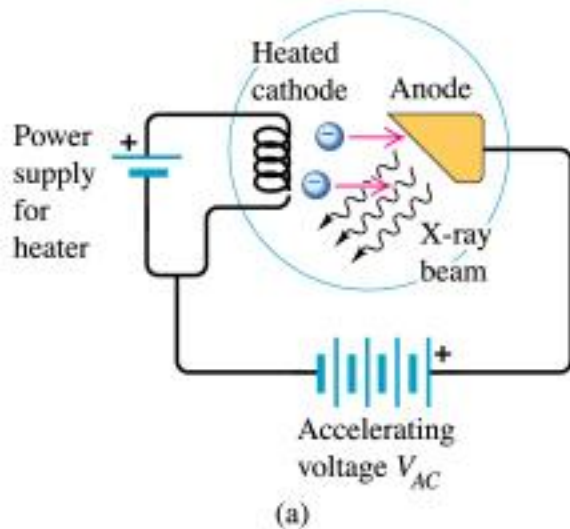
["Rare Earth Elements—Critical Resources for High Technology: USGS Fact Sheet 087-02". \*pubs.usgs.gov\*. Retrieved 2024-03-23.](https://pubs.usgs.gov/factsheet/087-02/)

# Wilhelm Roentgen 1895

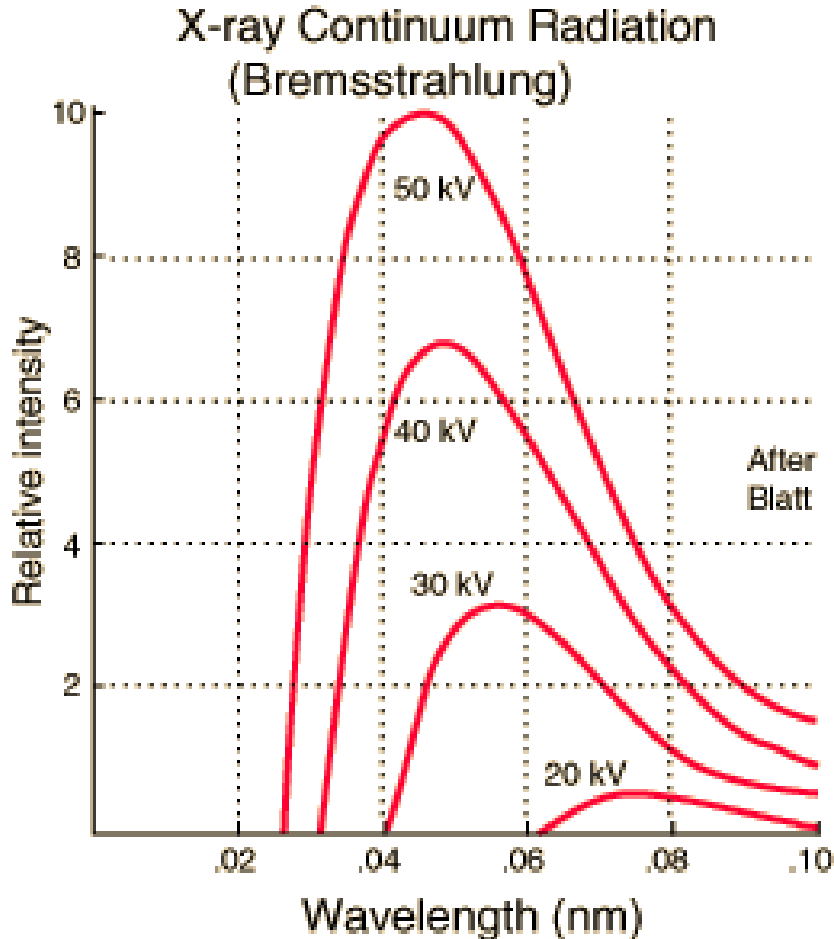


# Lampa rentgenowska

Roentgen 1895; prom. X :  $10^{-12}\text{m} - 10^{-9}\text{m}$



# Promieniowanie ciągłe rentgenowskie



Ciągłe widmo promieniowania X.

Energia fotonu powstającego w wyniku zderzenia elektronu z anodą:

$$h\nu = E_k - E_{k'}$$

gdzie  $E_k$  i  $E_{k'}$  to energie elektronu przed i po zderzeniu. W wyniku zderzeń elektron traci różne ilości energii stąd energia fotonu może być różna, ale nie większa niż to wynika z bilansu:

$$h\nu_{max} = E_k \quad \text{dla } E_{k'} = 0$$

$$\frac{m_e v^2}{2} = eV_{AC} = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

# Kwantowanie energii

- **Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych**
- **Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami***
- **W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała**

Atom wodoru wg  
mechaniki  
kwantowej

Równanie Schrödingera

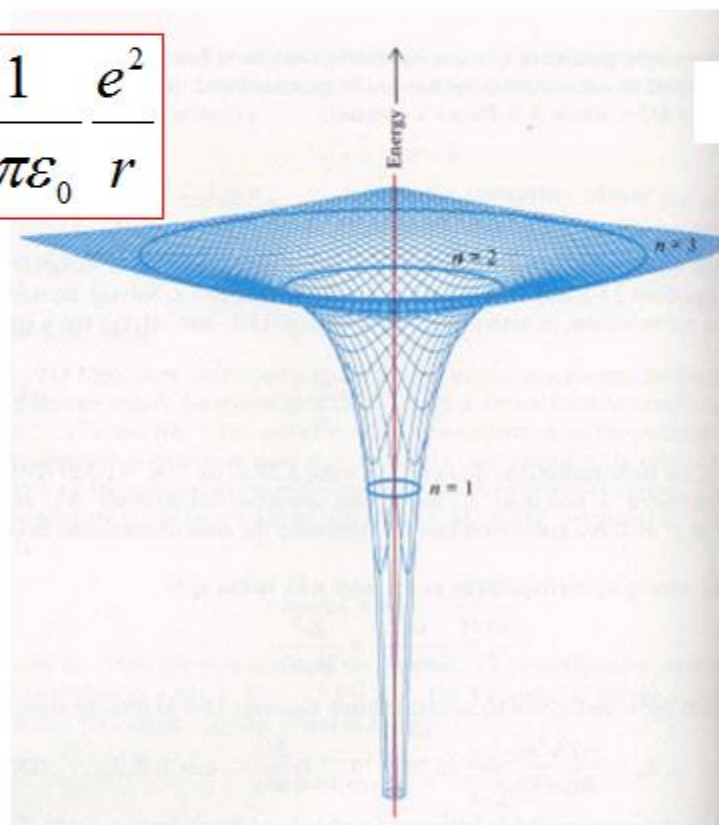
$$\hat{H}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

$$\left\{ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] + V(x, y, z) \right\} \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

Równanie różniczkowe na pochodne cząstkowe z 3 niezależnymi współrz.

Energia potencjalna we  
współrzędnych  
sferycznych.

$$\rightarrow V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$



# Rozwiązanie równania Schrödingera dla elektronu w atomie

Stan elektronu charakteryzowany jest poprzez skwantowane: energię, wartość momentu pędu, rzut momentu pędu na wybrany kierunek oraz wartość rzutu własnego momentu pędu (spinu) elektronu na wybrany kierunek.

<u>nazwa</u>	<u>symbol</u>	<u>wartość</u>	<b>Funkcja falowa elektronu w atomie zgodnie z zakazem Pauliego jest inna dla każdego elektronu</b>
główna liczba kwantowa	$n$	1, 2, 3, ...	<b><math>\Psi_{n,l,m_l,m_s}</math></b>
poboczna liczba kwantowa	$l$	0, 1, 2, ... $n-1$	
magnetyczna liczba kwantowa	$m_l$	od $-l$ do $+l$	
spinowa liczba kwantowa	$m_s$	$\pm 1/2$	

# Atom wieloelektronowy

- Atom zawierający więcej niż jeden elektron.
- Energie elektronu są teraz inne niż dozwolone energie w atomie wodoru. Związane jest to z odpychaniem pomiędzy elektronami. Zmienia to energię potencjalną elektronu.
- Dozwolone energie elektronu zależą od głównej liczby kwantowej  $n$  oraz w mniejszym stopniu od orbitalnej liczby kwantowej  $\ell$ . Zależność od  $l$  staje się istotna dla atomów o dużej ilości elektronów.
- Każdy elektron zajmuje w atomie stan który jest opisany poprzez liczby kwantowe:  $n, \ell, m_\ell, m_s$ .

# Reguła wykluczenia Pauliego

Zakaz Pauliego: stan kwantowy może być obsadzony dwoma elektronami ale tylko jeśli ich spiny są antyrównoległe. Takiej konfiguracji odpowiada najniższa energia, zgodnie z dążeniem każdego układu do równowagi.

- Z zakazu Pauliego wynika kolejność obsadzania poziomów energetycznych w atomach wieloelektronowych.
- Zakaz Pauliego uzasadnia ułożenie atomów pierwiastków w tablicy układu okresowego pierwiastków.

# Funkcja falowa elektronu w atomie $\Psi_{n,l,m_l,m_s}$

$$n = 1; l = 0; m_l = 0; m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$n = 2; l = 0, 1; m_l = 0, \pm 1; m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{1,0,0,-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{1,0,0,+\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \text{ Stan } 1s^2$$

2 stany do  
obsadzenia  
przez  
elektrony

Powłoka K

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{2,0,0,-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,0,0,+\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \text{ Stan } 2s^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{2,1,0,-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,1,0,+\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,1,-1,-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,1,-1,+\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,1,+1,-\frac{1}{2}} \\ \Psi_{2,1,+1,+\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \text{ Stan } 2p^6$$

2 stany do  
obsadzenia  
przez  
elektrony

6 stanów do  
obsadzenia  
przez  
elektrony

Powłoka L - 8 stanów

# Funkcja falowa elektronu w atomie $\Psi_{n,l,m_l,m_s}$

$$n = 3; l = 0, 1, 2; m_l = 0, \pm 1, \pm 2; m_s = \pm \frac{1}{2}$$

- $\Psi_{3,0,0,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,0,0,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,0,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,0,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,-1,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,-1,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,+1,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,1,+1,+\frac{1}{2}}$

**Stan  $3s^2$**   
**2 stany do**  
**obsadzenia**  
**przez**  
**elektrony**

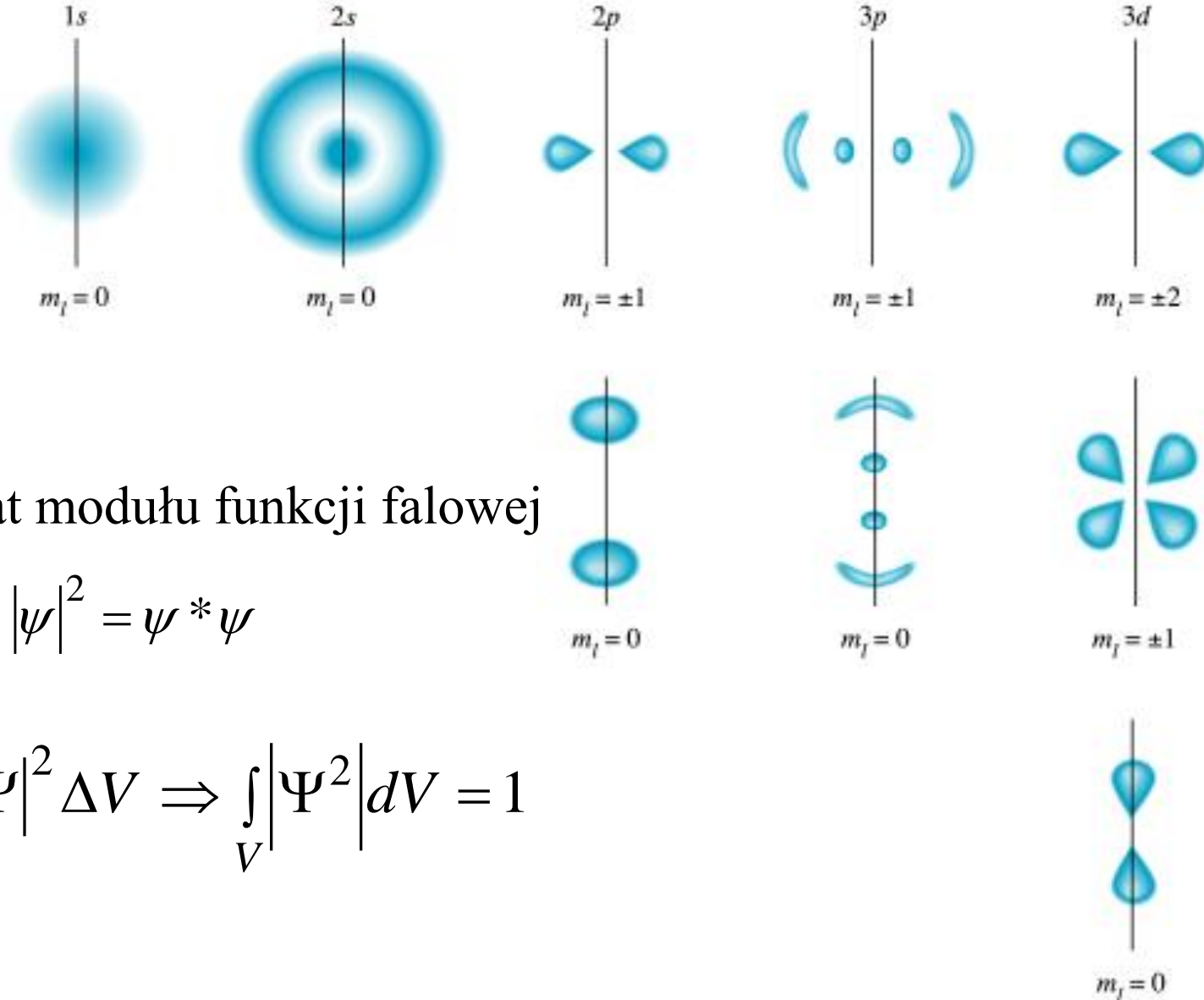
**Stan**  
 **$3p^6$**   
**6 stanów do**  
**obsadzenia**  
**przez**  
**elektrony**

- $\Psi_{3,2,0,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,0,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,+1,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,+1,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,-1,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,-1,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,2,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,2,+\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,-2,-\frac{1}{2}}$
- $\Psi_{3,2,-2,+\frac{1}{2}}$

**Stan**  
 **$3d^{10}$**   
**10 stanów**  
**do**  
**obsadzenia**  
**przez**  
**elektrony**

**Powłoka M - 18 stanów**

# Kwadrat modułu funkcji falowej - orbitale



Kwadrat modułu funkcji falowej

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

$$p = |\Psi|^2 \Delta V \Rightarrow \int_V |\Psi^2| dV = 1$$

# Atomu wodoru

Energia elektronu w atomie wodoru:

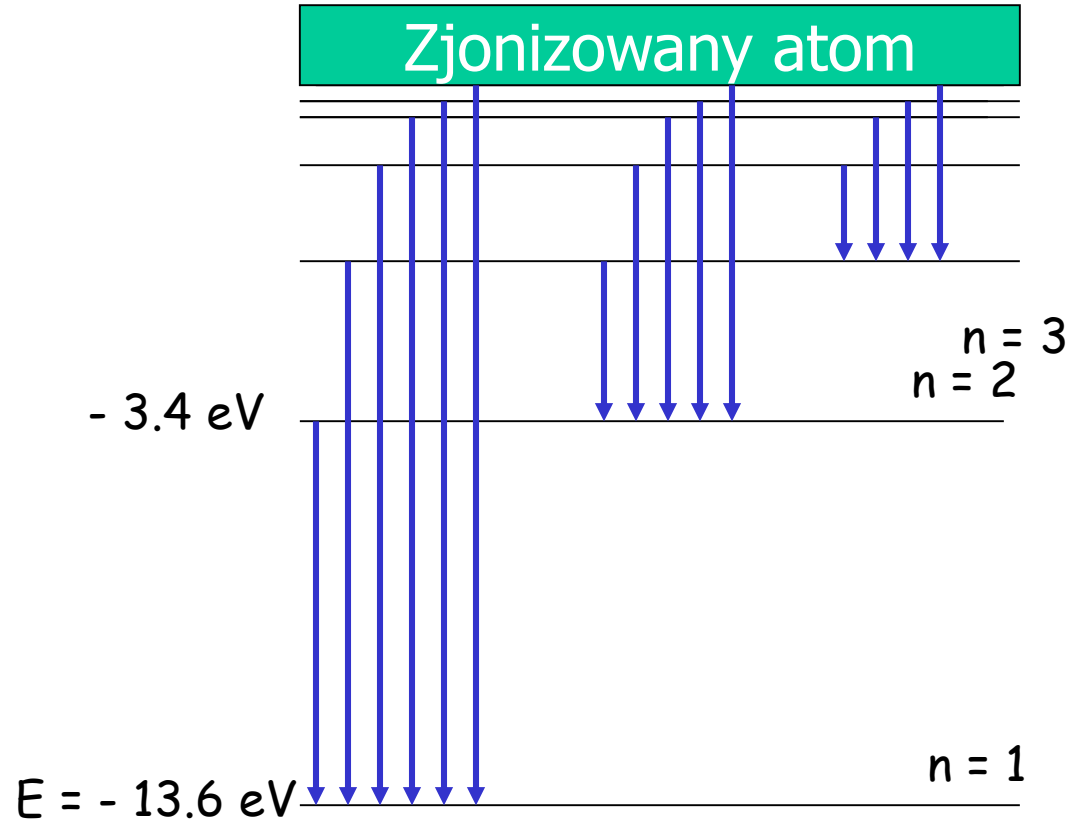
$$E_n = -13.6\text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

**n- główna liczba kwantowa**

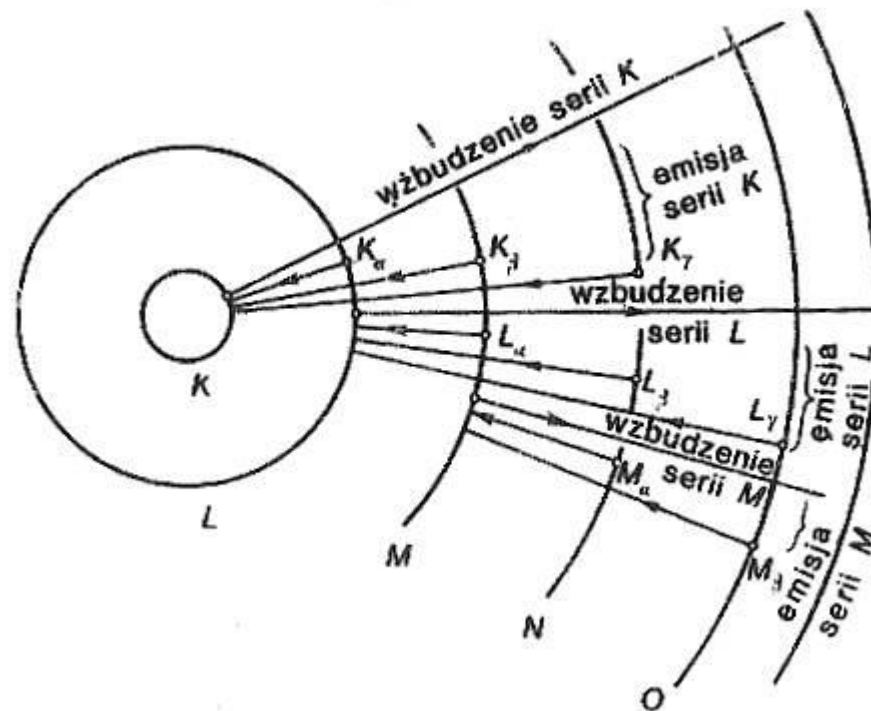
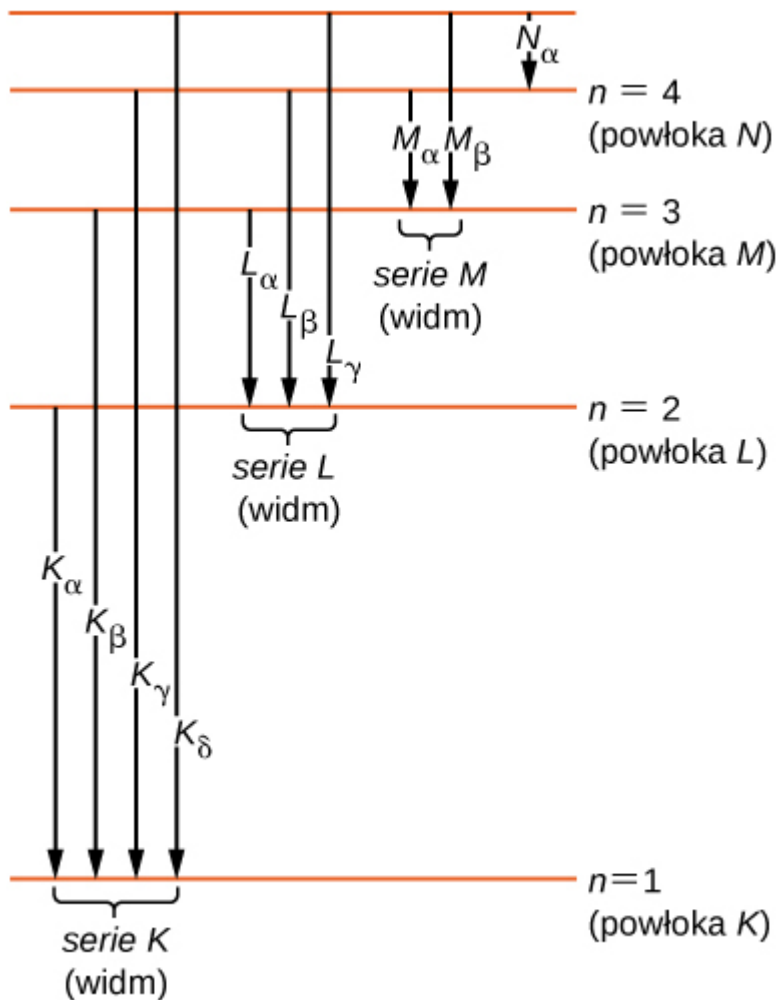
$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots;$

**Energia fotonu absorbowanego  
lub emitowanego:**

$$hf = 13,6\text{eV} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$



# Atom wieloelektronowy i promieniowanie charakterystyczne rentgenowskie



$$E_n \cong -Z^2 13.6eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

# Atom wieloelektronowy

W atomie wieloelektronowym elektron jest przyciągany przez jądro o ładunku  $+Ze$ , ale inne elektrony ekranują ten ładunek. Uwzględnia się go poprzez wprowadzenie stałej ekranowania  $a$ .

$$E_n \cong -(Z - a)^2 13.6 eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

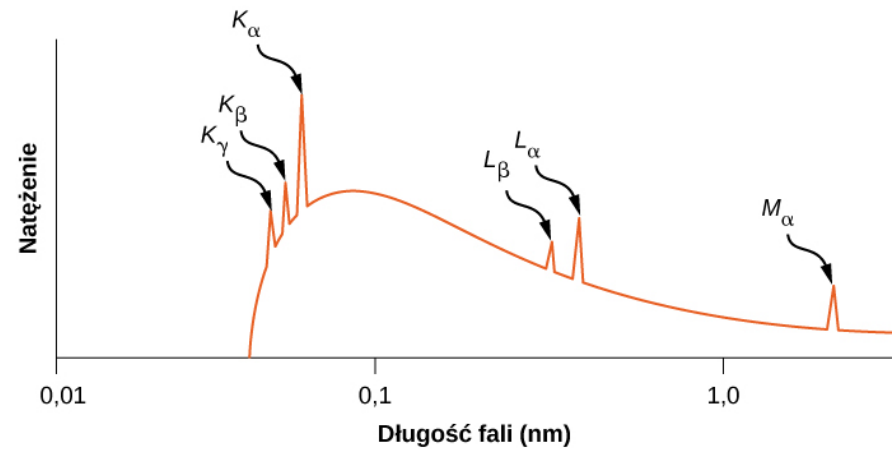
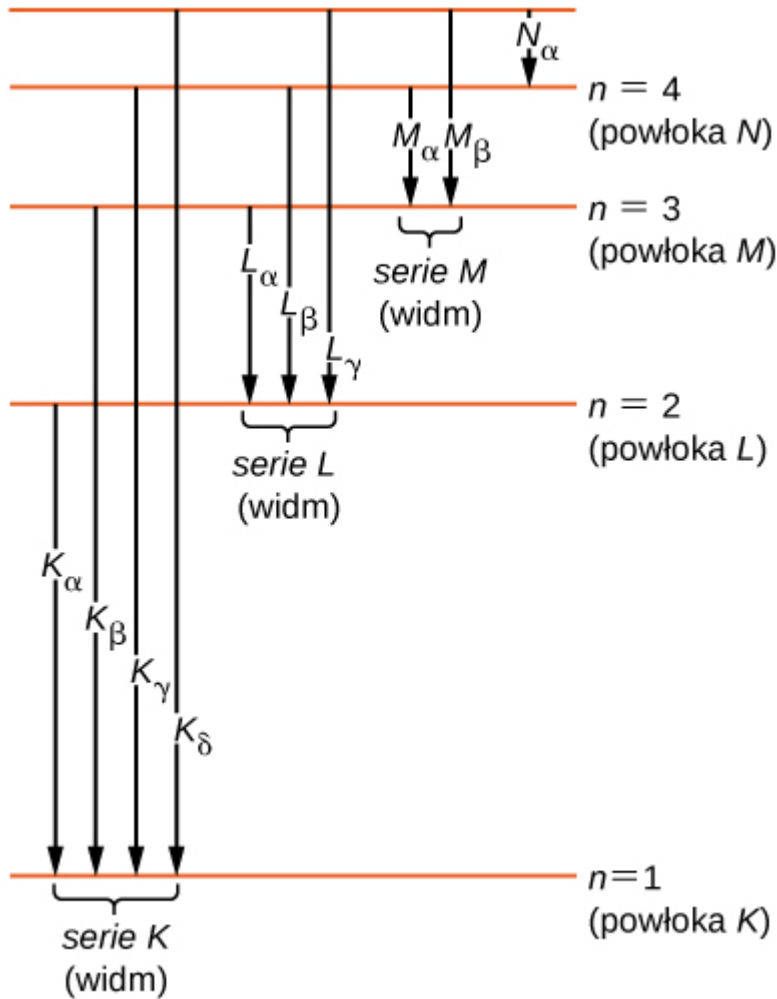
$$hf = (Z - a)^2 13,6 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

$$f = (Z - a)^2 R c \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

Prawo Moseley'a

$R = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1}$  stała Rydberga,  $c$  – prędkość światła;  $Rhc = 13,6 eV$ .

# Promieniowanie charakterystyczne rentgenowskie



$$E_{K_\alpha} < E_{K_\beta} \rightarrow \lambda_{K_\alpha} > \lambda_{K_\beta}$$

# Prawo Moseley'a

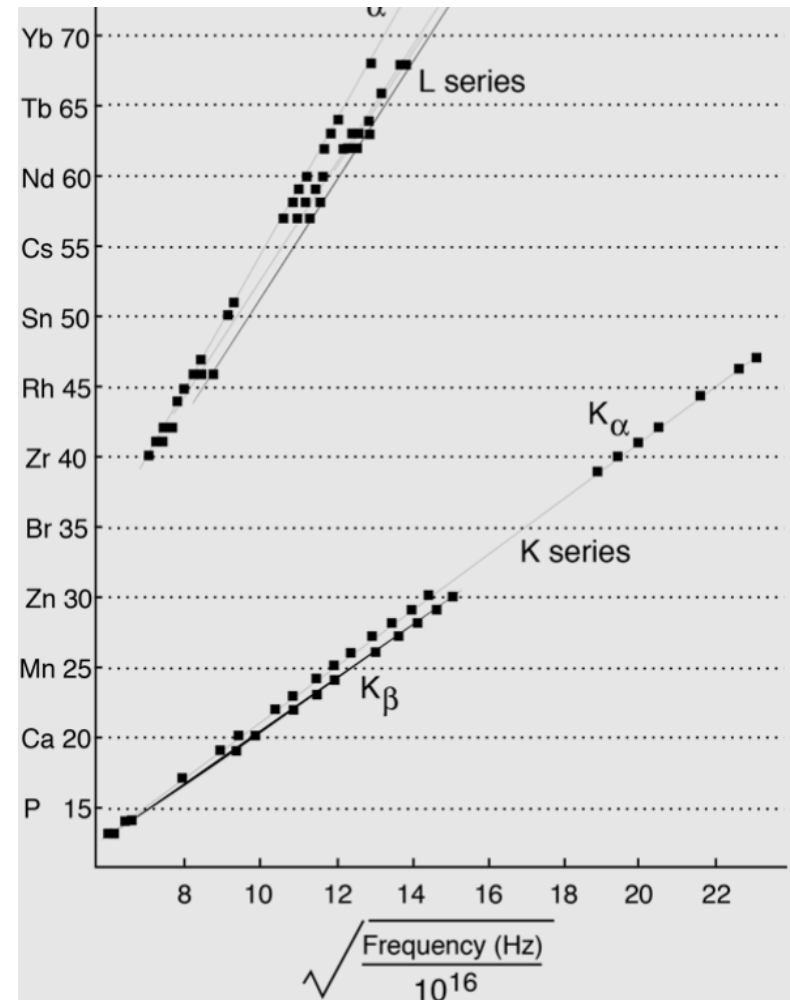
$$f = (Z - a)^2 R c \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

W przybliżeniu,

$$Z \sim \sqrt{f}$$

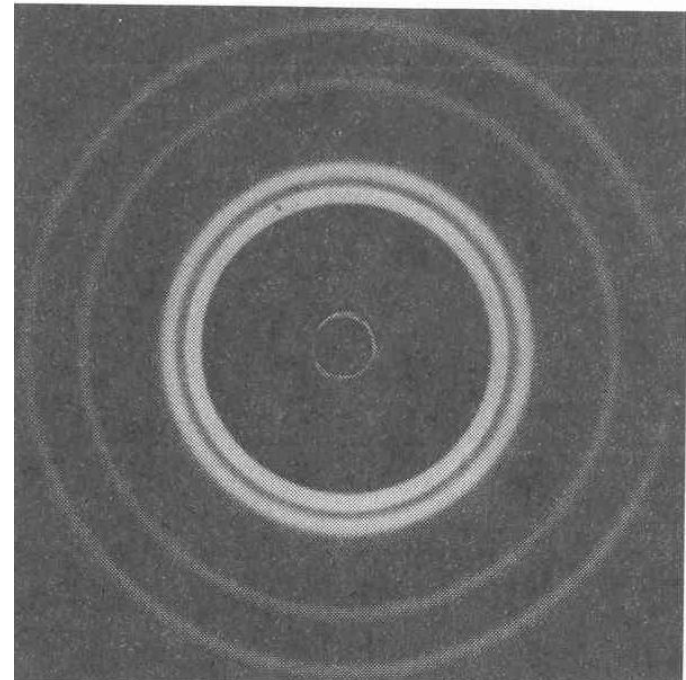
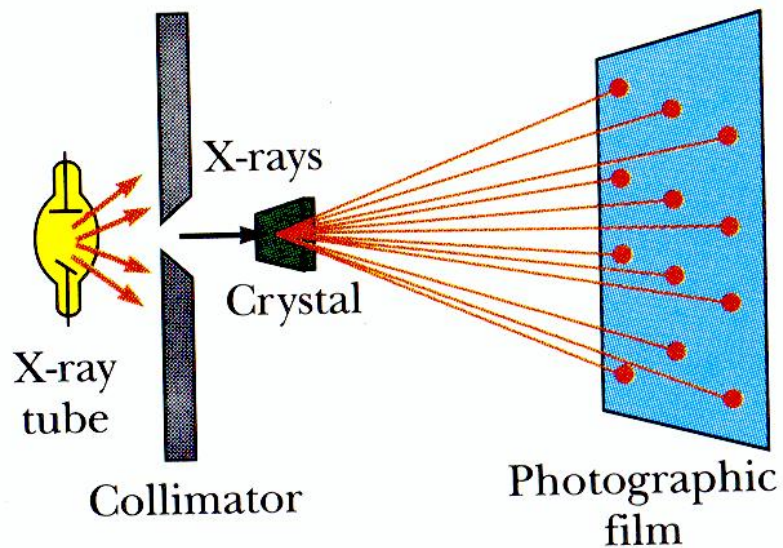
$$hf = (Z - a)^2 13,6 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

$$Rhc = 13,6 eV$$



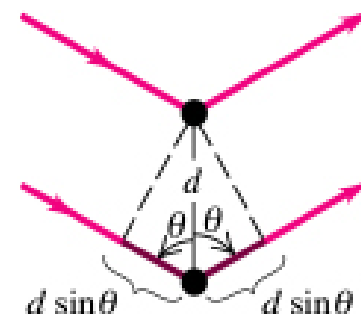
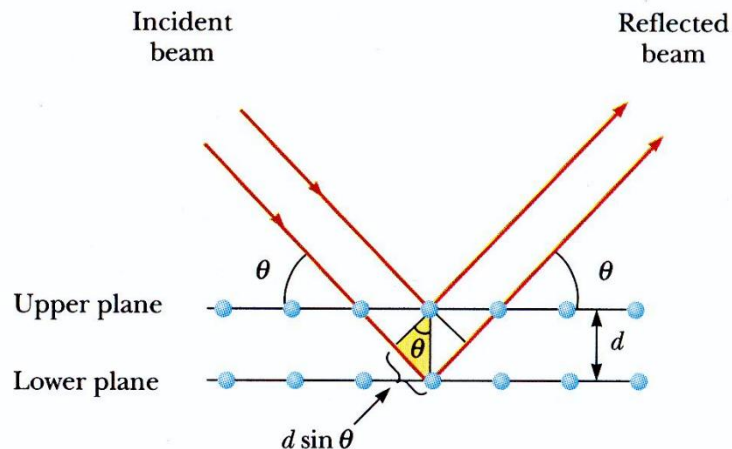
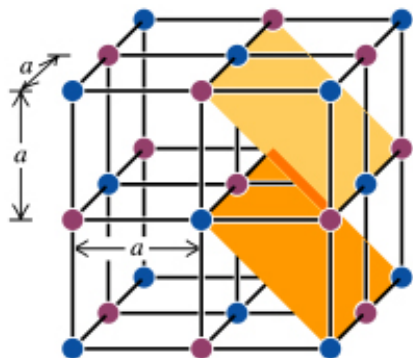
# Dyfrakcja promieniowania X

Długość fali promieniowania X jest rzędu odległości międzyatomowych w sieci krystalicznej ciała stałego. Stąd możliwa jest dyfrakcja prom. X na atomach sieci krystalicznej.



# Dyfrakcja promieniowania X

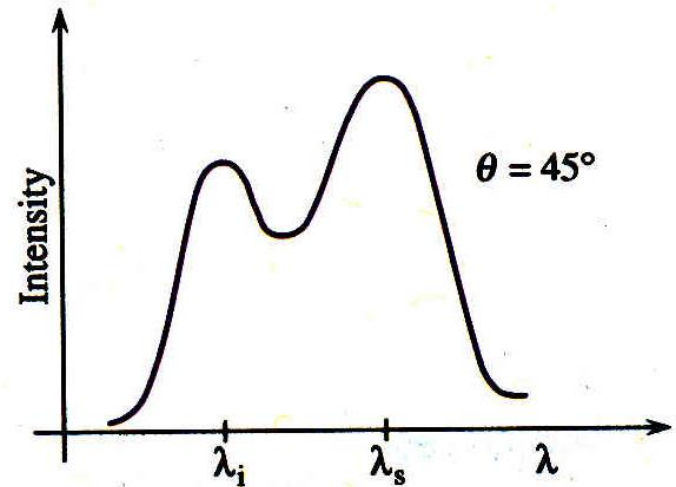
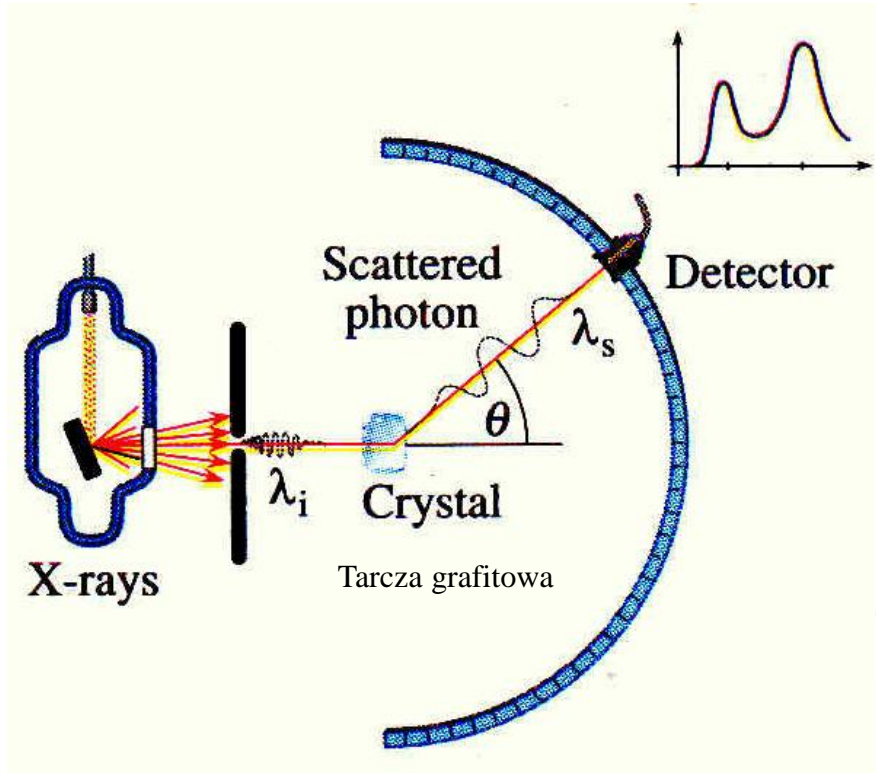
X



Warunek na maksima  
dyfrakcyjne:

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

# Efekt Comptona (1923)



**Efekt Comptona** nazywamy zmianę długości fali elektromagnetycznej w wyniku rozpraszania jej na swobodnych elektronach. Fotony przekazują elektronom pęd i energię.

# Foton

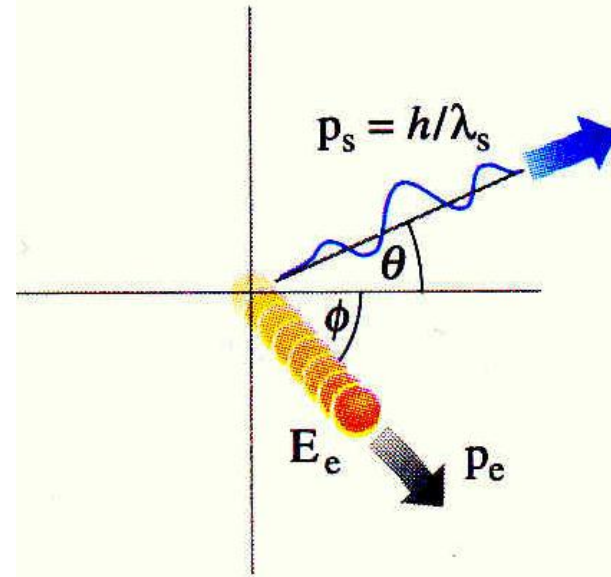
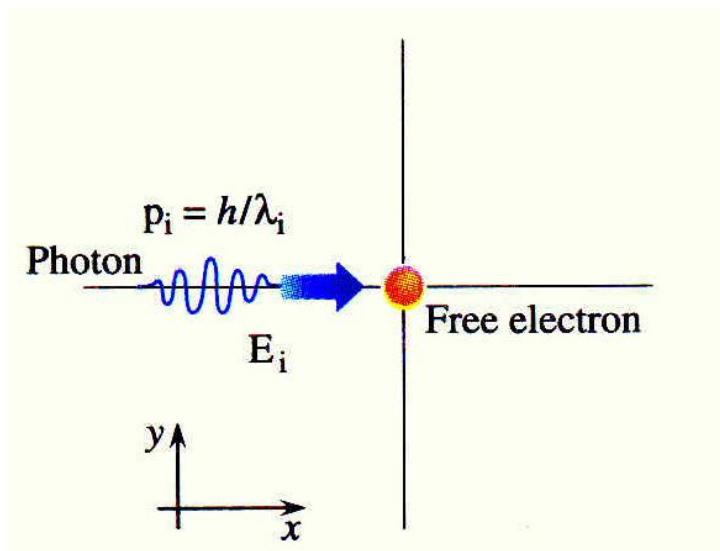
$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = c\sqrt{m_o^2c^2 + p^2}$$

$$h\nu = c\sqrt{m_o^2c^2 + p^2}$$

Jeżeli  $m_o = 0$ , to  $h\nu = cp \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

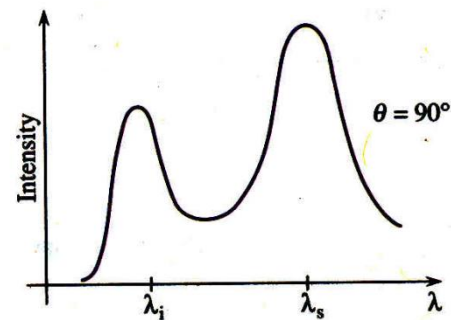
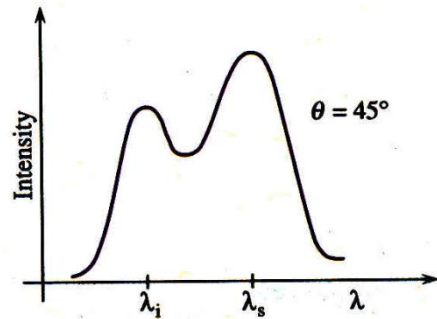
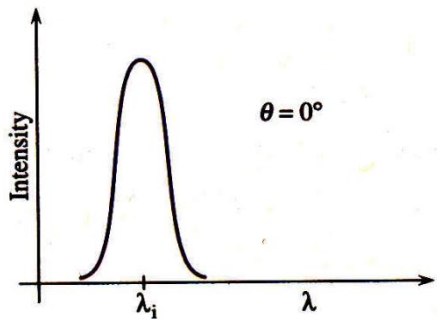
# Efekt Comptona - wyjaśnienie



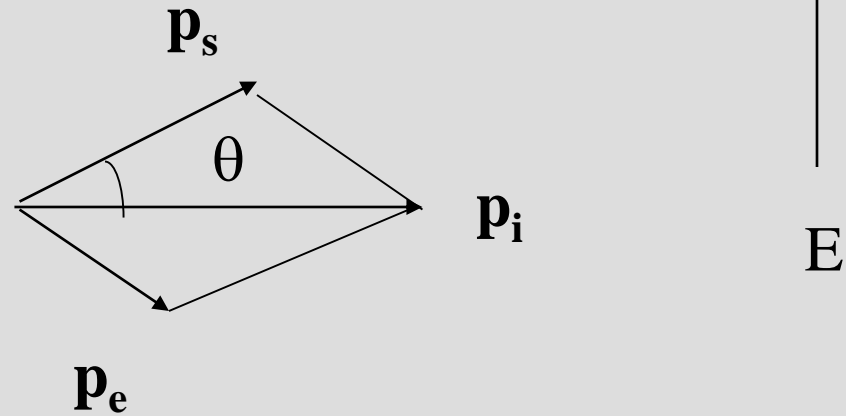
- Zderzenia fotonów o pędzie  $p_i$  i energii  $E=hc/\lambda_i$  ze spoczywającymi elektronami.
- Elektron uzyskuje pęd  $p_e$ , a pęd fotonu maleje do wartości  $p_s$ .
- Długość rozpraszanej fali elektromagnetycznej zwiększa się do wartości  $\lambda_s=h/p_s$ .
- Kierunek propagacji fali ulega zmianie o kąt  $\theta$ . Zmiana długości fali jest tym większa, im większy jest kąt rozproszenia. Zależność zmiany długości fali od kąta rozpraszania wyznaczyć można wykorzystując prawa zachowania pędu i energii.

$$\vec{p}_i = \vec{p}_s + \vec{p}_e \quad \text{oraz} \quad h\nu_i + m_e c^2 = h\nu_s + c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2}$$

# Efekt Comptona – wyjaśnienie cd.



$$\vec{p}_i = \vec{p}_s + \vec{p}_e \quad \text{oraz} \quad \frac{hc}{\lambda_i} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda_s} + c \sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2}$$



$$\lambda_s - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e^2 &= \mathbf{p}_s^2 + \mathbf{p}_i^2 - 2p_s p_i \cos \Theta & p_i c + m_e c^2 &= p_s c + E \\ (p_i c - p_s c + m_e c^2)^2 &= E^2 = (m_e c^2)^2 + (p_e c)^2 \\ p_i^2 - 2p_i p_s + p_s^2 + 2(p_i - p_s)m_e c + m_e^2 c^2 &= \\ m_e^2 c^2 + p_i^2 - 2p_i p_s \cos \Theta + p_s^2 & \\ p_i p_s (1 - \cos \Theta) &= (p_i - p_s)m_e c \quad / \quad 1/(p_i p_s) \\ m_e c \left( \frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_i} \right) &= (1 - \cos \Theta) \end{aligned}$$

## Podsumowanie

Zjawiska potwierdzające kwantową naturę światła:

- Efekt fotoelektryczny

$$hf = W + K_{max}$$

- Promieniowanie X

$$\frac{m_e v^2}{2} = eV_{AC} = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

- Efekt Comptona

$$\lambda_s - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$