

# Wykład III

1. Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie i na siatce dyfrakcyjnej
2. Fale Materii
3. Relacja nieoznaczoności Heisenberga
4. Funkcja falowa
5. Równanie Schrödingera
6. Cząstka w studni potencjału

# Fale materii

## ■ Dualizm falowo-cząstkowy fali elektromagnetycznej.

- W zjawiskach takich jak dyfrakcja czy interferencja fala elektromagnetyczna wykazuje typowe własności falowe.
- W zjawiskach takich jak efekt Comptona czy efekt fotoelektryczny fala elektromagnetyczna wykazuje naturę korpuskularną, tzn. jest strumieniem cząstek zwanych **fotonami**.

## ■ Hipoteza de Broglie'a .

- W 1924 roku L. de Broglie założył, że dualizm cząstkowo - falowy jest własnością charakterystyczną nie tylko dla fali elektromagnetycznej, ale również dla cząstek o masie spoczynkowej różnej od zera .Oznacza to, że cząstki takie jak np. elektrony powinny również wykazywać własności falowe. Fale te nazwał on **falami materii**. Założył, że długość fal materii określona jest tym samym związkiem, który stosuje się do fotonów.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

# Fale materii

## Elektron

- Masa =  $9.11 \times 10^{-31}$  kg    prędkość =  $10^6$  m / s

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(10^6 \text{ m/s})} = 7.28 \times 10^{-10} \text{ m}$$

## Piłka

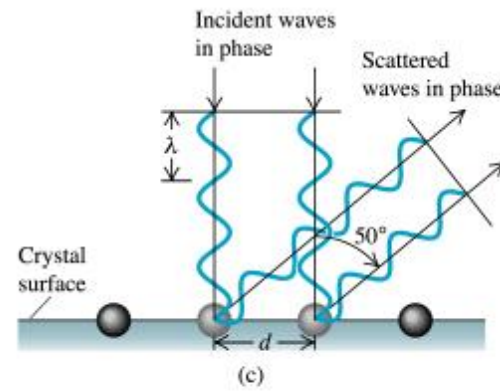
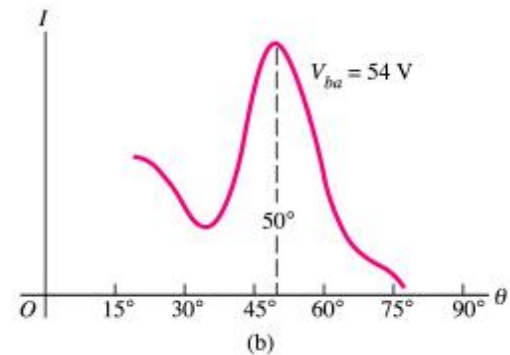
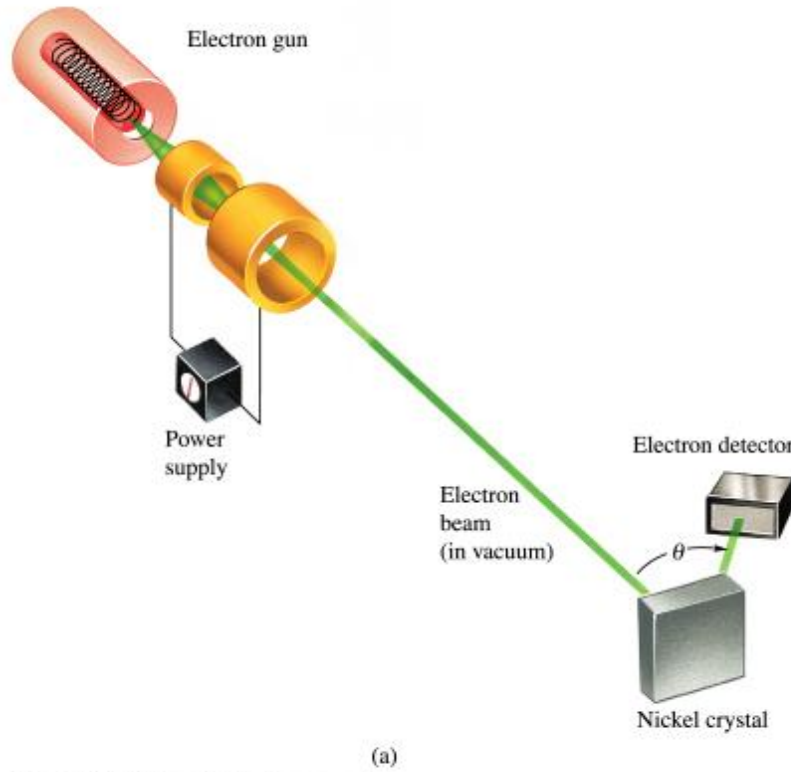
- Masa = 1 kg    prędkość = 1 m / s

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(1 \text{ kg})(1 \text{ m/s})} = 6.63 \times 10^{-34} \text{ m}$$

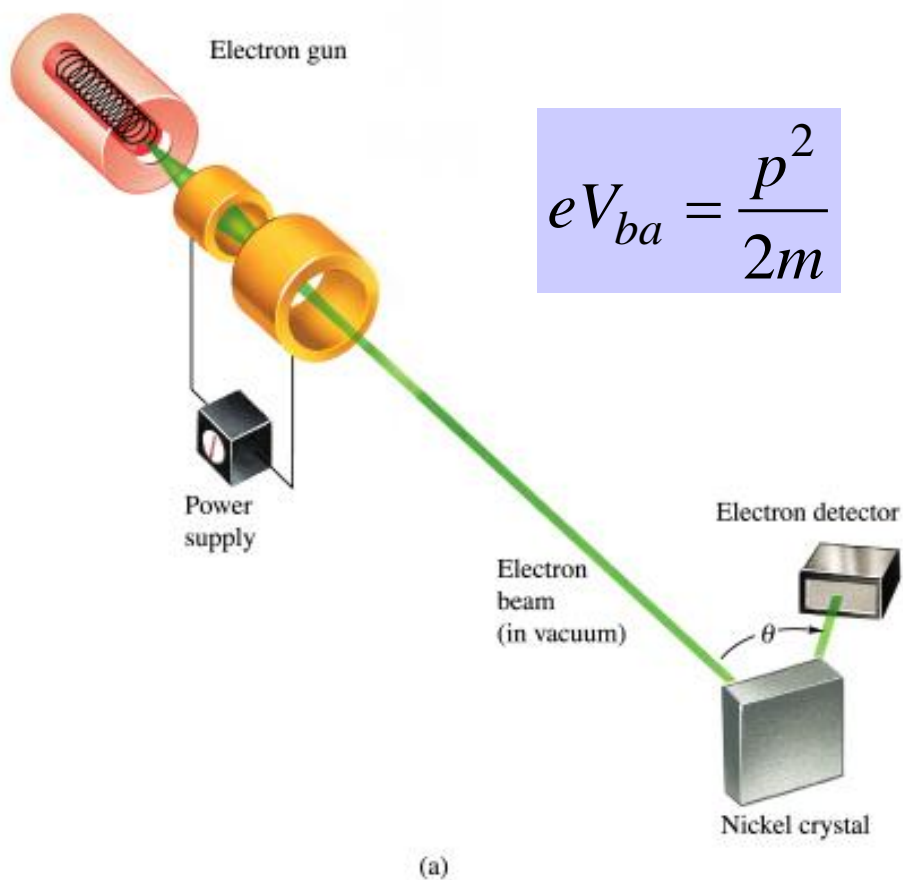
# Doświadczenie C.J.Davissona i L.G.Germera (1927)

## Eksperymentalne potwierdzenie istnienia fal materii

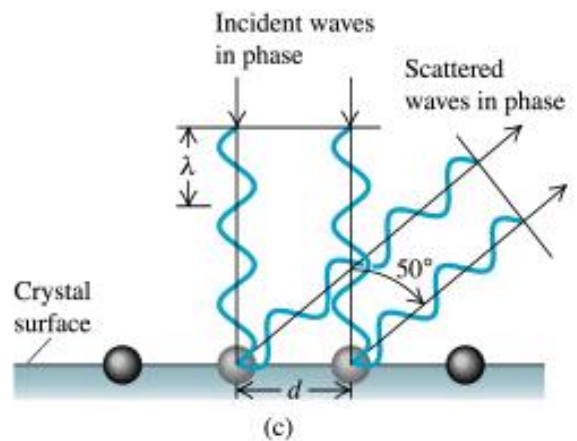
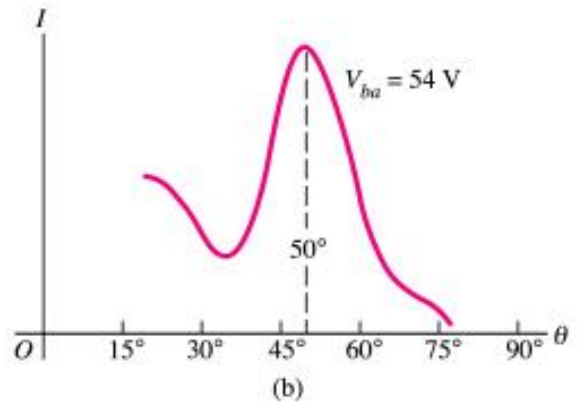
$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m}$$



# Doświadczenie C.J.Davissona i L.G.Germera



$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m}$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

## Wzór de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} = 0.167\text{nm}$$

## Z dyfrakcji

$$d_{\text{Ni}} = 0.215\text{nm}$$

$$\lambda = d \sin \theta = 0.165\text{nm}$$

# Funkcja falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a, cząstki takie jak elektron czy proton, mają własności falowe.

Własności falowe cząstki (lub innego obiektu) w mechanice kwantowej opisuje tzw. **funkcja falowa**  $\Psi(x,t)$  :

- zawiera w sobie wszystkie informacje o obiekcie (np. cząstce)
- w ogólnym przypadku jest to funkcja zespolona współrzędnych przestrzennych oraz czasu
- musi być funkcją ciągłą , a także musi mieć ciągłą pochodną
- kwadrat modułu funkcji falowej

$$|\psi|^2 = \psi * \psi$$

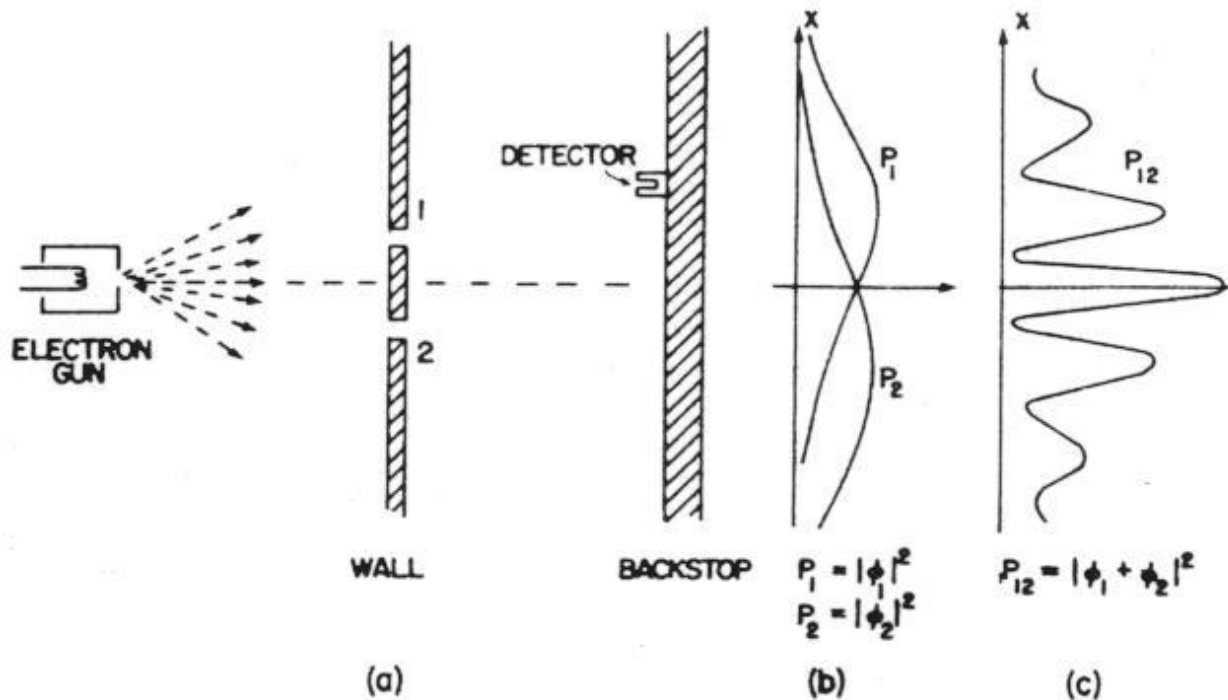
jest **gęstością prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w chwili  $t$  w pewnym punkcie przestrzeni

$$p = |\Psi|^2 \Delta V \Rightarrow \int_V |\Psi|^2 dV = 1$$

# Zasada komplementarności Bohr 1927

Światło nie jest falą ani cząstką, dopóki go nie zmierzysz.  
Fotony czy też elektrony oraz obiekty mikroświata w jednych zjawiskach mogą zachowywać się jak fala, a w innych jak cząstka tzn. wykazują zarówno własności falowe jak i korpuskularne. Obie te cechy uzupełniają się wzajemnie, dając pełny opis danego obiektu.

# Dyfrakcja elektronów



Nawet jeśli elektrony są wysyłane pojedynczo, jeden po drugim, na ekranie z czasem powstaje wzór interferencyjny, a nie dwa paski naprzeciwko szczelin.

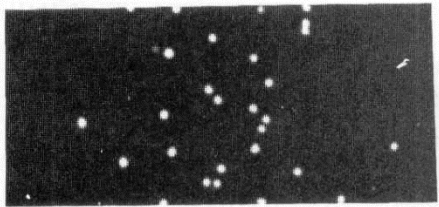
Oznacza to, że pojedynczy elektron interferuje sam ze sobą.

Jeśli detektor umieścić przy którejś szczelinie, wzór interferencyjny znika !

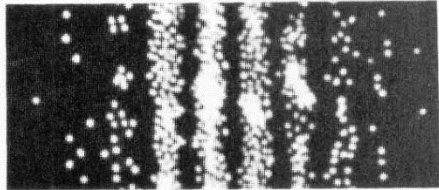
Obserwacja = interakcja z otoczeniem, wymusza na elektronie zachowanie takie jak zachowanie klasycznej cząstki, która przechodzi tylko przez jedną szczelinę.

wikipedia

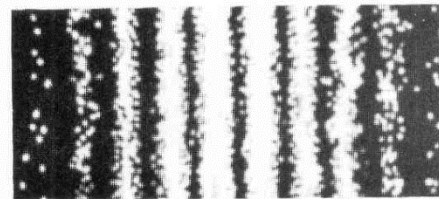
# Dyfrakcja elektronów



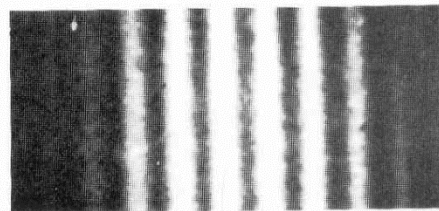
(a) After 28 electrons



(b) After 1000 electrons



(c) After 10,000 electrons



(d) Two-slit electron pattern

W mechanice kwantowej istotne są stany cząstki np. spin. Załóżmy, że mamy elektron, który może mieć spin w górę lub w dół. W mechanice klasycznej układ może być albo w jednym albo w drugim stanie. W mech. kwantowej stan może być superpozycją obu stanów.

Przed pomiarem cząstka istnieje w superpozycji stanów, a akt obserwacji wymusza przyjęcie jednej wartości. Uważa się, że następuje kolaps funkcji falowej (uklasycznienie). Kolaps funkcji falowej to w mechanice kwantowej nagła redukcja superpozycji (wielu stanów jednocześnie) do jednego, konkretnego stanu po dokonaniu pomiaru. Należy zaznaczyć, że obserwacja nie musi być dokonana przez świadomego obserwatora.

wikipedia

# Splątanie kwantowe (Nobel 2022)

Pojęcie wprowadzone przez Erwina Schrödingera w 1935 roku, który próbował wyjaśnić paradoks Einsteina, Podolskyego, Rosena, EPR.

Einstein nazywał splątanie kwantowe „upiornym oddziaływaniem na odległość”.

**Splątanie kwantowe:**

- **Wspólny stan:** Cząstki stają się jednym obiektem kwantowym; nie można opisać stanu jednej cząstki bez odniesienia do drugiej.
- **Nielokalność:** Korelacje między cząstkami występują natychmiastowo, nawet jeśli dzielą je miliony kilometrów.
- **Przed dokonaniem pomiaru stan splątanych cząstek jest nieoznaczony (nie wiemy, która cząstka ma jaki stan), znamy jedynie korelację między nimi (np. że są przeciwne).**
- **Pomiar nie jest pasywnym odczytem, lecz niszczy superpozycję i „zmusza” cząstkę do przyjęcia określonego stanu, co bezpośrednio determinuje stan jej partnera.**
- **Splątanie umożliwia tworzenie super bezpiecznych kluczy szyfrujących (Quantum Key Distribution, QKD) i jest podstawą działania komputerów kwantowych.**
- **Eksperymenty: Istnienie splątania udowodniono eksperymentalnie na odległościach setek kilometrów.**

**Przykład:** jeśli dwa fotony są kwantowo splątane to gdy zmierzy się polaryzację jednego z nich, polaryzacja drugiego będzie zawsze miała przeciwny kierunek. W uproszczeniu można powiedzieć, że fotony w tym stanie są z sobą połączone, niezależne od odległości, jaka je dzieli.

# Splątanie kwantowe -realizacja

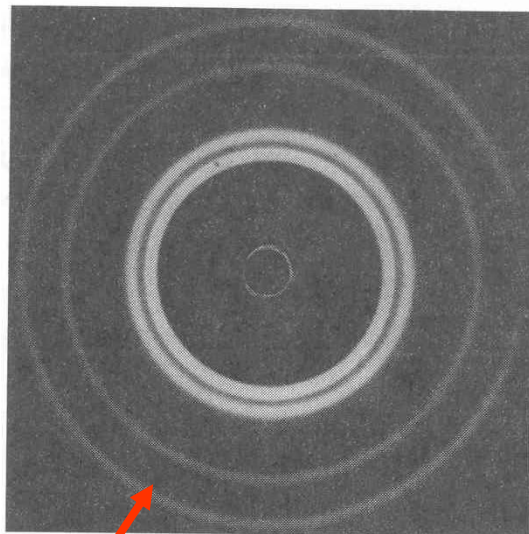
- **Kryształ nieliniowy**

**Wiązka lasera (foton o wyższej energii) jest kierowana na nieliniowy kryształ optyczny (np. beta-boran baru - BBO). W kryształcie jeden foton o wysokiej energii rozdziela się na dwa fotony o niższej energii, które są splątane, np. pod względem polaryzacji. Powstają pary fotonów drgających w płaszczyznach prostopadłych do siebie, a ich polaryzacje są ze sobą ściśle powiązane.**

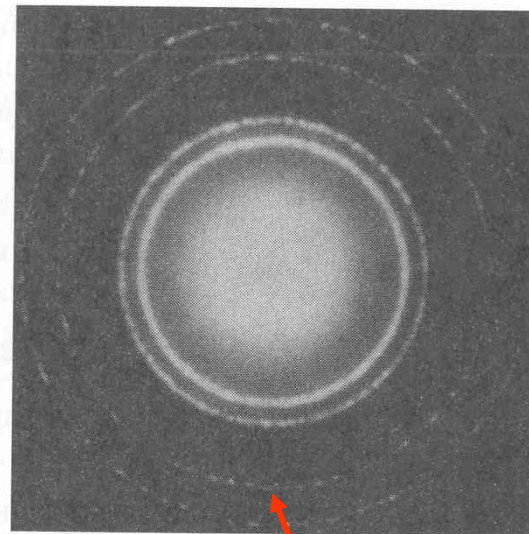
- **Kropki kwantowe**

**Wiązka lasera oświetla nanostruktury półprzewodnikowe, które emitują "doskonale" splątane fotony.**

# Dyfrakcja na polikrystalicznej folii aluminiowej



Dyfrakcja  
promieniowania X



Dyfrakcja elektronów

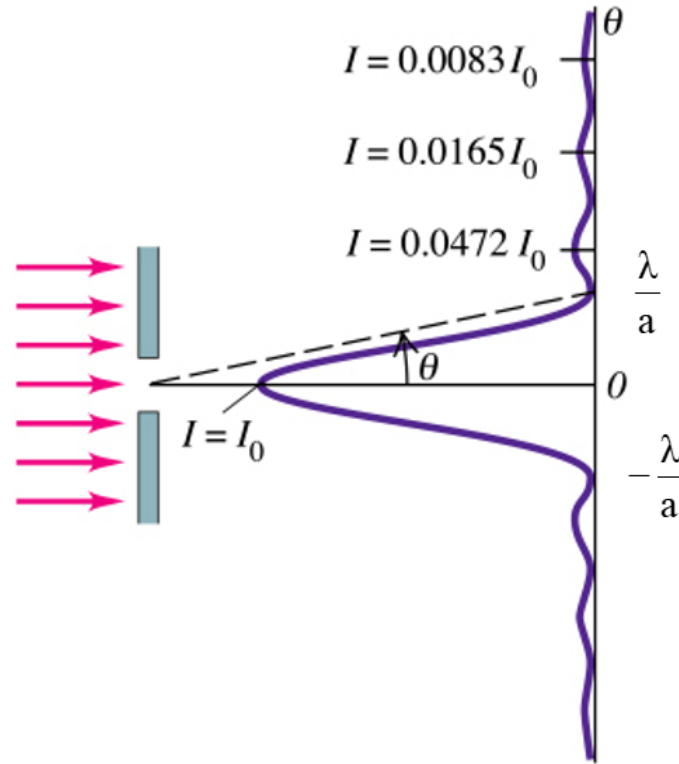
# Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

$$I = I_{\max} \cdot \left( \frac{\sin((\pi a \sin \theta) / \lambda)}{(\pi a \sin \theta) / \lambda} \right)^2$$

Warunek na minima:

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = n\pi$$

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{a}$$



(a)

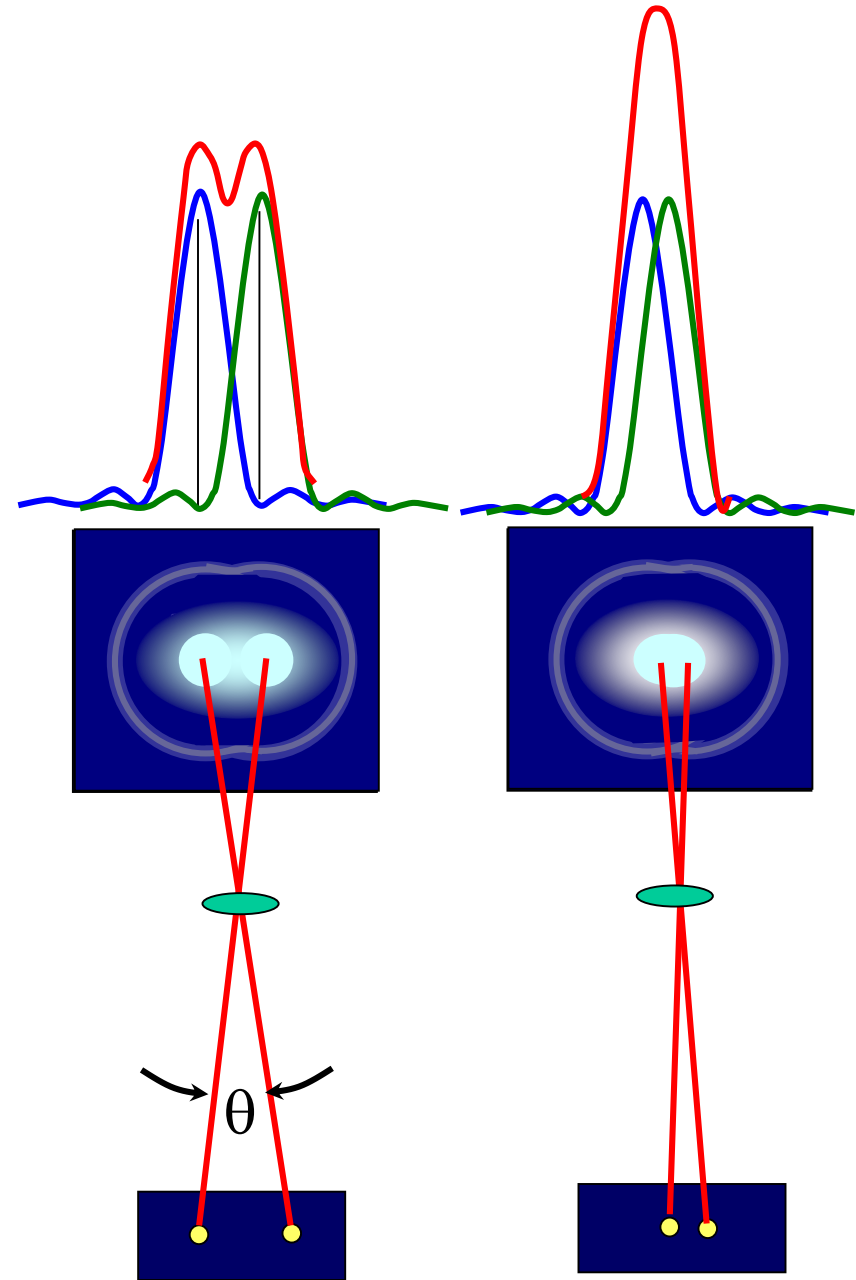
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Dla długiej wąskiej szczeliny pierwsze minimum wypada pod kątem  $\theta = \lambda/a$   
Można pokazać, że dla otworu kołowego pierwsze minimum wypada pod kątem  $\theta = 1,22\lambda/a$ , stąd dwa obiekty punktowe będą rozróżnialne, jeśli są rozdzielone kątem  $\theta = 1,22\lambda/a$ .

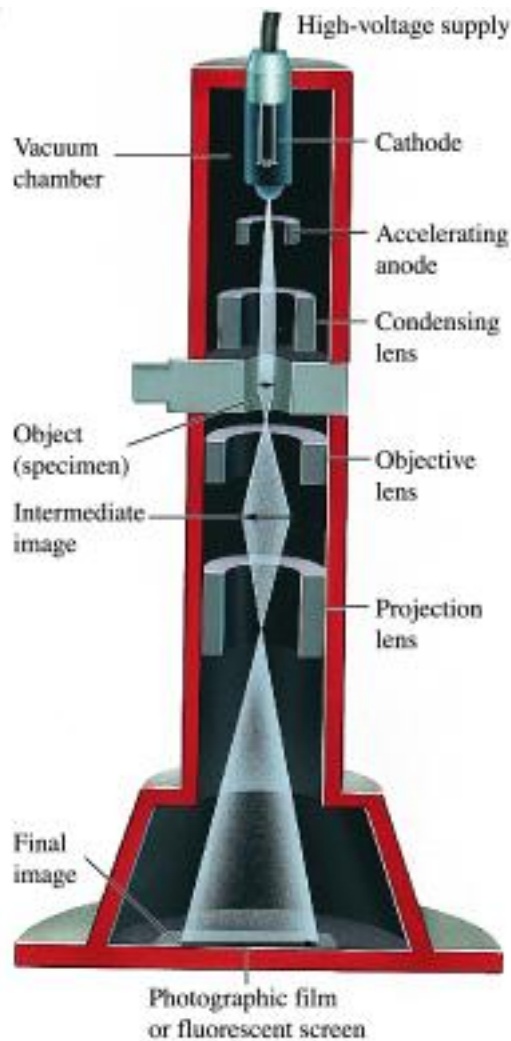
# Kryterium Rayleigh'a

*Jeśli położenie centralnego maksimum jednego obrazu dyfrakcyjnego przypada na położenie pierwszego minimum drugiego obrazu, to obrazy te są rozróżnialne.*

Można pokazać, że dla otworu kołowego pierwsze minimum wypada pod kątem  $\theta = 1,22\lambda/a$ , stąd dwa obiekty punktowe będą rozróżnialne, jeśli są rozdzielone kątem  $\theta = 1,22\lambda/a$ .



# Mikroskop elektronowy transmisyjny (TEM)



obiektyw  
okular

**Mikroskop optyczny**  
**Zdolność rozdzielcza rzędu 1000nm**  
**Powiększenie do 2000.**

**TEM**  
**Zdolność rozdzielcza rzędu 0.05nm**  
**Powiększenie  $50 \cdot 10^6$**

(a)

# Zadanie

## Zdolność rozdzielcza mikroskopu elektronowego

W mikroskopie TEM wiązka elektronów o długości fali  $1 \text{ pm}$  wychodzi przez otwór o promieniu  $2 \mu\text{m}$ . Jaki jest najmniejszy kąt pomiędzy rozróżnialnymi punktowymi źródłami?

## Rozwiązanie

Możemy bezpośrednio skorzystać ze wzoru na zdolność rozdzielczą  $\Delta\theta$  mikroskopu (omawianą we wcześniejszym rozdziale) dla fali o długości  $\lambda = 1 \text{ pm}$  i średnicy otworu  $D = 2 \mu\text{m}$

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot \frac{1 \text{ pm}}{2 \mu\text{m}} = 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ.$$

## Znaczenie

Gdybyśmy użyli zwykłego mikroskopu i światła o długości fali  $400 \text{ nm}$ , zdolność rozdzielcza wynosiłaby tylko  $14^\circ$  i wszystkie szczegóły obrazu byłyby rozmyte.

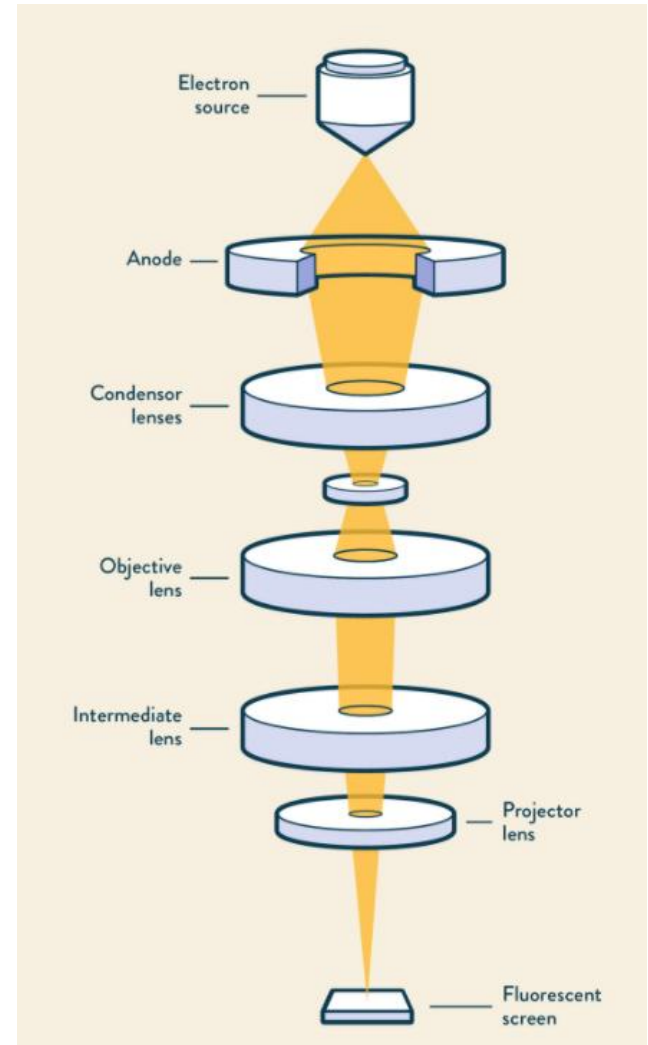
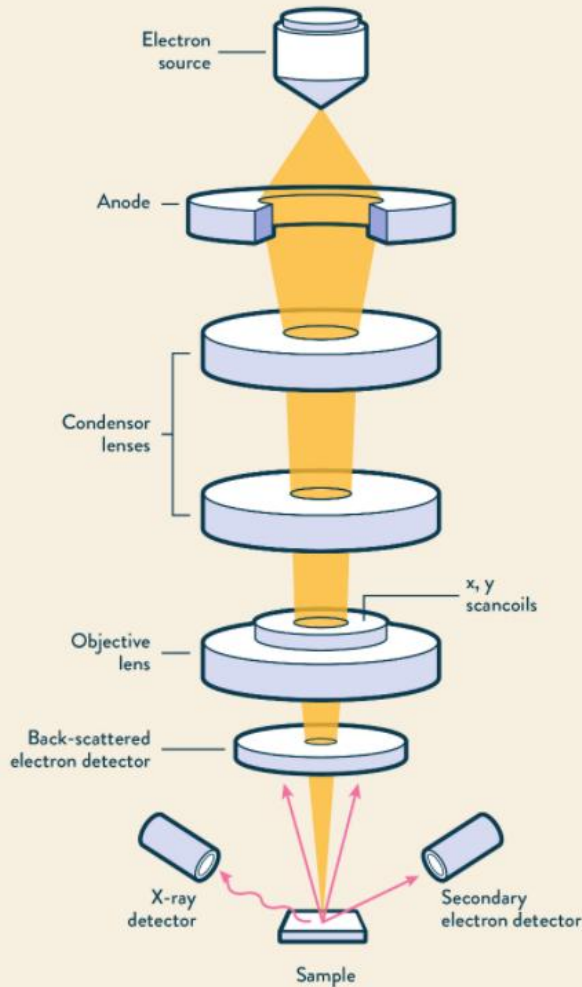
# SEM vs TEM

**SEM i TEM –  
dyfrakcja elektronów**

**SEM tworzy obraz  
poprzez wykrywanie  
odbitych lub wybitych  
elektronów.**

**TEM wykorzystuje  
elektrony  
transmitowane przez  
próbkę do tworzenia  
obrazu.**

**TEM - struktura  
krystaliczna,  
morfologia i informacje  
o stanie naprężenia;  
SEM –informacja na  
temat powierzchni  
próbki i jej składu.**



# SEM i TEM

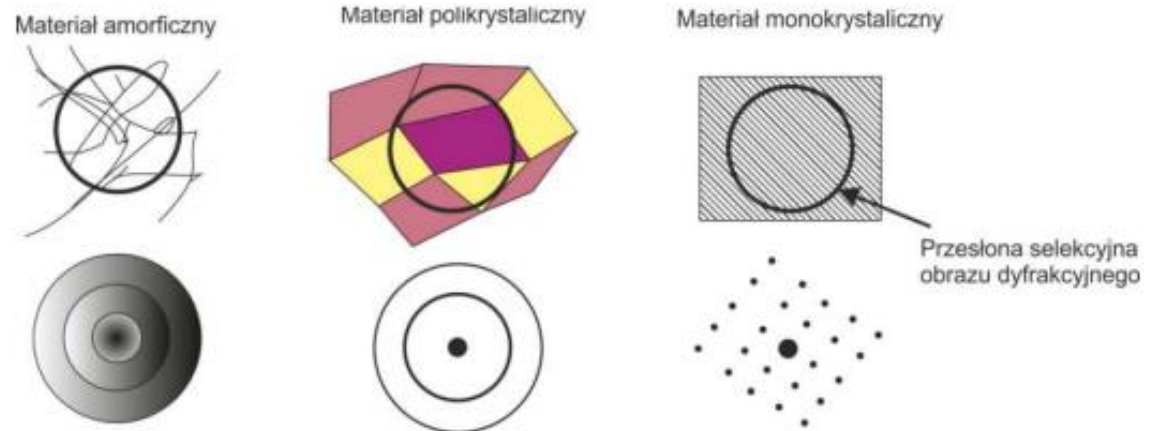
## Obrazy otrzymywane z TEM

Koherentne ugięcie fali elektronowej na atomach; rozpraszanie elastyczne – bez straty energii.

Zdolność rozdzielcza rzędu  $0.5\text{\AA}$

Powiększenie  $50 \cdot 10^6$ .

Energia kinetyczna elektronów do  $400\text{keV}$ .



$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

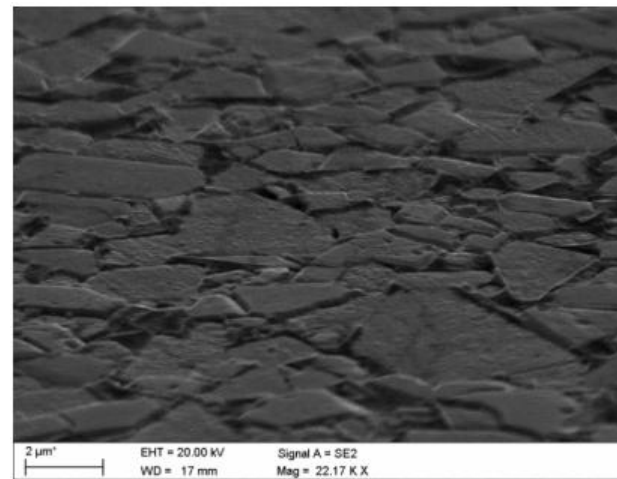
## Obrazy otrzymywane z SEM (węgiel spiekany)

Rozpraszanie nieelastyczne – ze stratą energii.

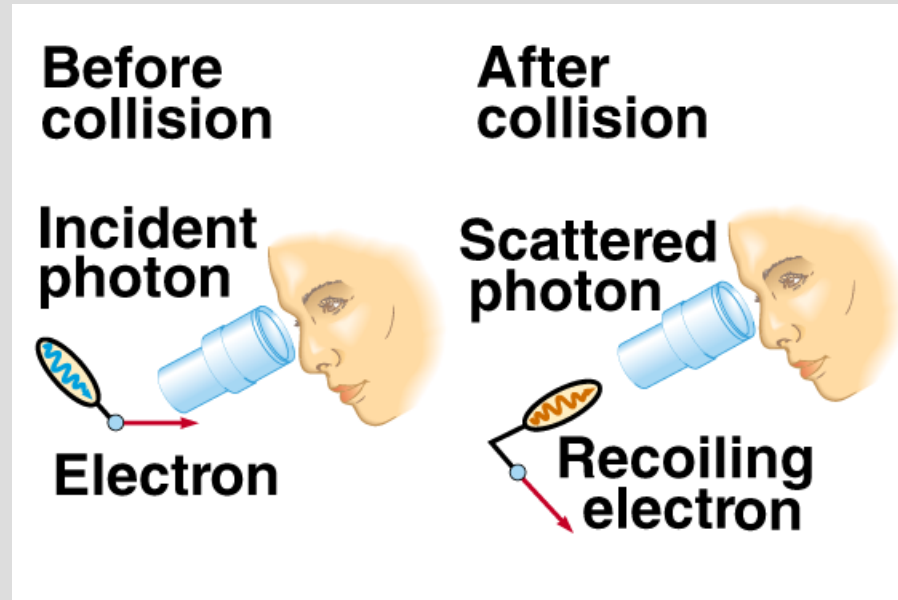
Zdolność rozdzielcza rzędu  $1\text{nm}$

Powiększenie  $5 \cdot 10^5$ .

Energia kinetyczna elektronów Do  $40\text{keV}$ .

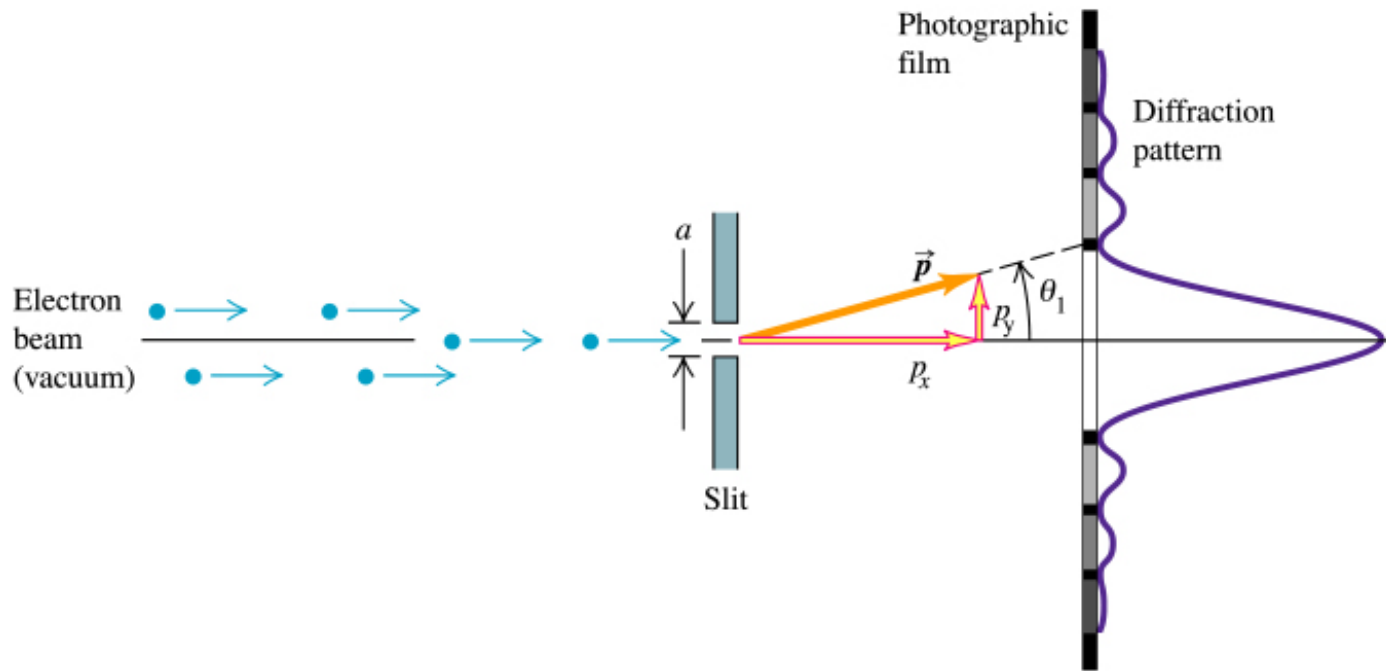


# Zasada nieoznaczoności Heisenberga (1932)



Proces pomiaru zaburza stan układu

# Zasada nieoznaczoności



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

**Elektron po przejściu przez szczelinę zyskuje składową pędu w kier. osi y :**

$$a \sin \Theta_1 = \lambda \quad \Theta_1 \cong \frac{\lambda}{a} \quad p_y = p_x \tan \Theta_1 \cong p_x \Theta_1$$

$$p_y = p_x \frac{\lambda}{a} \quad (p_y)_{\text{śr}} = 0 \quad \Delta p_y \geq p_y = p_x \frac{\lambda}{a} = p_x \frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a}$$

$$\Delta p_y a \geq h$$

# Zasada nieoznaczoności

- Fizyka klasyczna
  - dokładność pomiaru jest zdeterminowana jedynie jakością aparatury pomiarowej
  - Nie ma teoretycznych ograniczeń na dokładność z jaką mogą być wykonane pomiary
- Mechanika kwantowa
  - Obowiązuje **zasada nieoznaczoności**: pewnych wielkości fizycznych nie można zmierzyć równocześnie z dowolną dokładnością

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru pędu i położenia:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

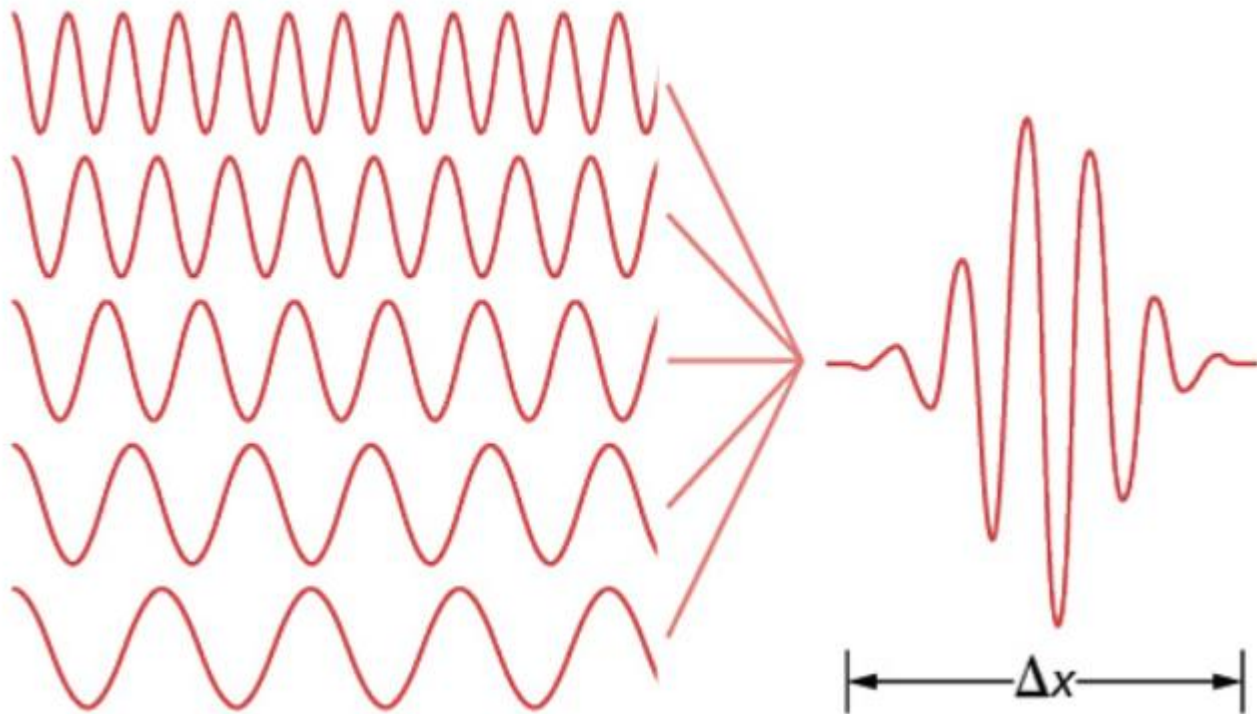
**Przykład.** Pęd poruszającego się z prędkością  $v=5000\text{m/s}$  elektronu zmierzono z dokładnością  $\pm 0.003\%$ . Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć położenie tego elektronu?

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 3.9 \cdot 10^{-4} \text{m}$$

# Paczka falowa

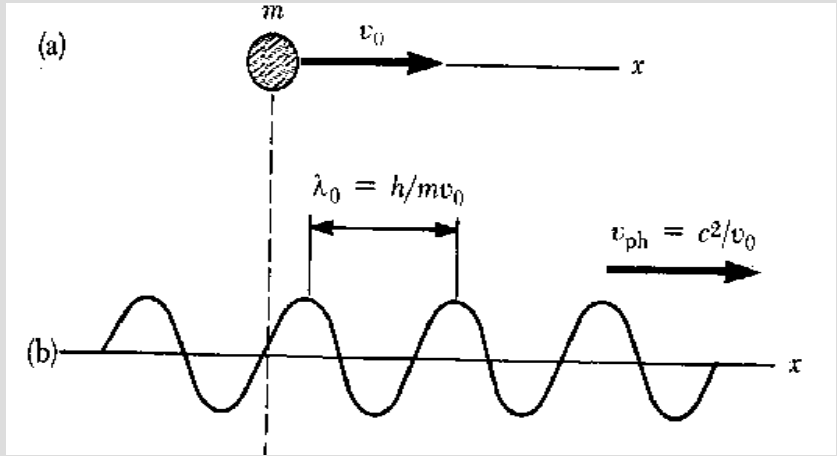
Fale płaskie o różnych długościach

Paczka falowa

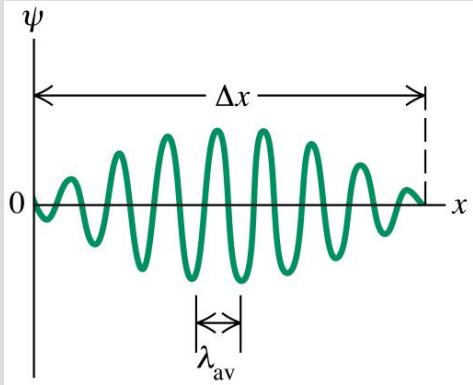


$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} d\lambda$$

# Dylemat: cząstka czy fala?

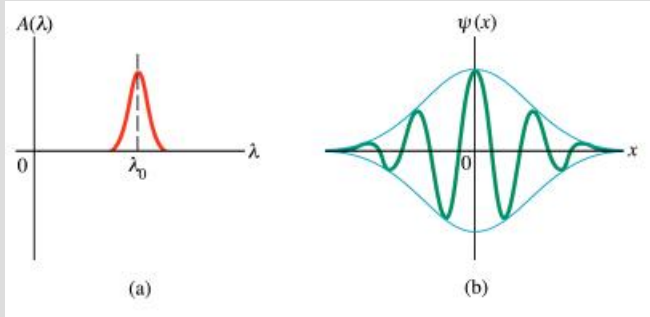


**Cząstka swobodna**

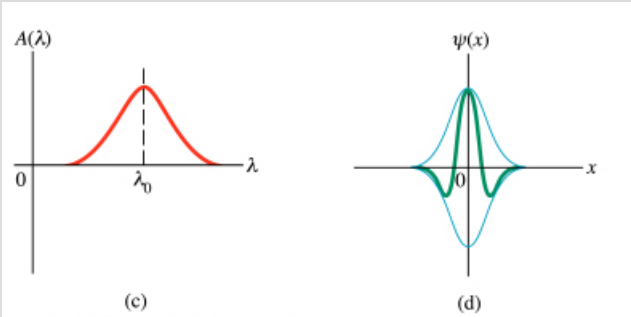


**Cząstka zlokalizowana**

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} d\lambda$$



$$\lambda = \frac{h}{p}$$



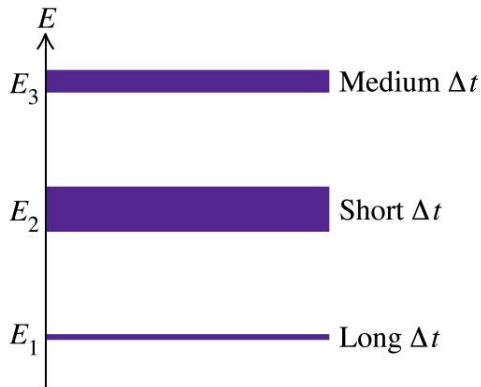
$\Delta\lambda$  małe  $\rightarrow$   $\Delta p_x$  małe i  $\Delta x$  duże

$\Delta\lambda$  duże  $\rightarrow$   $\Delta p_x$  duże i  $\Delta x$  małe

# Zasada nieoznaczoności energii

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:

$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar/2$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

**Przykład:** Czas przebywania atomu sodu w stanie wzbudzonym zmierzono z dokładnością  $\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-8}$  s. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć wartość energii tego stanu?

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 2 \cdot 10^{-8} eV$$

# Eksperymentalne potwierdzenie relacji Heisenberga

1. Dlaczego elektron nie spada na jądro?

Gdyby spadł zostałby zlokalizowany w obszarze  $\Delta x \cong 10^{-15}m$ , wtedy  $\Delta p_x$  będzie b. duże i energia kinetyczna b. duża. Elektron będzie „odpychany” od jądra.

2. Efekt tunelowy.

Aby cząstka mogła "tunelować" przez barierę, jej położenie nie może być ściśle określone w momencie wejścia w barierę. Relacja Heisenberga pozwala na "rozmycie" położenia, co umożliwia przeniknięcie przez obszar, który klasycznie jest niedostępny.

- Dlaczego Słońce się „pali” 4.5 mld lat ? Temperatura wewnątrz Słońca to ok.  $15 \cdot 10^6 K$  . Protony odpychają się więc aby nastąpiła fuzja jądrowa potrzebna jest temperatura tysiąc razy większa. Spalanie wodoru w hel następuje dzięki efektowi tunelowemu, który wynika z relacji Heisenberga ( rozmycie funkcji falowej).
- W dążeniu do miniaturyzacji i do upakowania jak największej liczby tranzystorów na jak najmniejszej powierzchni, dochodzimy do granicy ich rozmiarów, której nie można obniżyć. Współczesne tranzystory mają rozmiary bramek rzędu 2nm. Takie cienkie bariery elektron może pokonać dzięki efektowi tunelowemu. Powstający w wyniku tego efektu prąd upływu ogranicza działanie tranzystorów.

# **Eksperymentalne potwierdzenie relacji Heisenberga**

## **4. Działanie mikroskopu elektronowego (1931).**

**Im mniejsze  $\Delta x$  (rozmiar obiektu), tym większa nieoznaczoność  $\Delta p_x$  i rozmycie obrazu dyfrakcyjnego. Maksima dyfrakcyjne od sąsiednich punktów przekrywają się, rozdzielczość mniejsza.**

**5. Reaktor jądrowy: reakcja rozszczepienia – spowolnione neutrony napotykają na barierę ze strony jądra atomowego ( $U^{235}$ ,  $Pu^{238}$ ). Reakcja zachodzi dzięki efektowi tunelowemu – funkcje falowe neutronu i jądra przykrywają się.**

**6. Nukleosynteza gwiazdowa – efekt tunelowy.**

# Próżnia fluktuuje

**7. Zgodnie z kwantową elektrodynamiką (QED), próżnia nie jest pusta. Zarówno nasze otoczenie jak i próżnia są areną na której rządzą pola kwantowe: pole elektromagnetyczne, pole gluonowe, kwarkowe, elektronowe, fotonowe itd.**

**Próżnia wrze: fluktuuje pożyczoną energią zgodnie z relacją  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ , kreując pary wirtualnych cząstek i antycząstek, które w krótkim czasie anihilują.**

**Potwierdzenie eksperymentalne:**

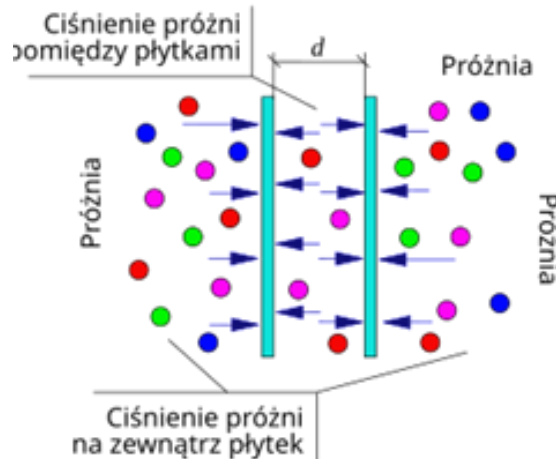
- **efekt Casimira (1948):** dwie płaskie płyty metalowe przyciągają się, ponieważ w obszarze między nimi jest mniej fluktuacji niż na zewnątrz.

**Fluktuacja próżni: kreacja i anihilacja wirtualnych par cząstka – antycząstka.**

- **Emisja spontaniczna**

# Efekt Casimira (teoria 1948)

Efekt Casimira polega na przyciąganiu się (innym niż grawitacyjne) dwóch płaskich, równoległych, przewodzących, nienaładowanych płyt. Fluktuacje próżni powodują powstanie wirtualnych cząstek. Ponieważ w obszarze między płytami jest mniej fluktuacji niż na zewnątrz, płyty ulegają ściśnięciu.



Wirtualne cząstki  
● ● ● ●  
Płytki z przewodnika  
||

$$F_c = \frac{A\hbar c\pi^2}{240d^4},$$

gdzie:

$A$  – powierzchnia płyt,

$\hbar$  – zredukowana stała Plancka,

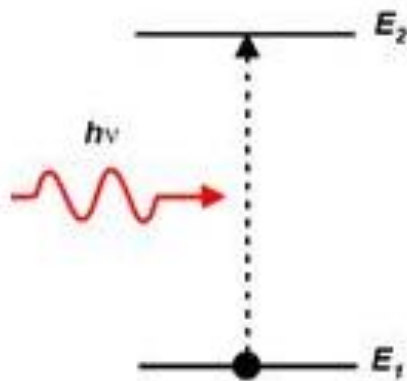
$c$  – prędkość światła w próżni,

$d$  – odległość pomiędzy płytami.

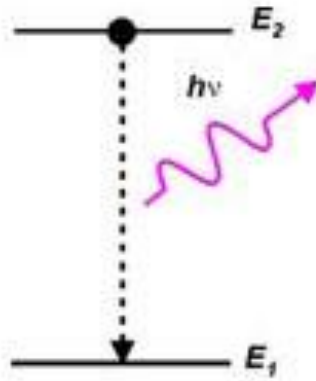
**Efekt Casimira został potwierdzony eksperymentalnie:  
1997 Steve Lamoreaux, 2002 Umar Mohideen**

# Emisja spontaniczna

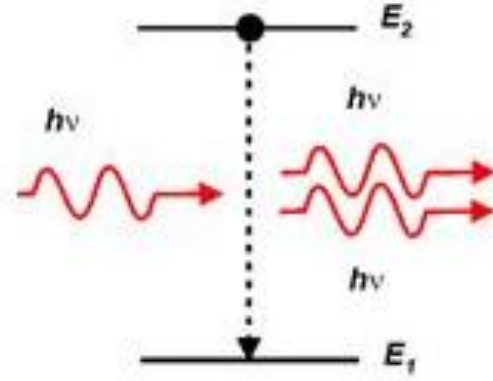
Emisja spontaniczna i fluktuacje próżni są ze sobą ściśle powiązane w ramach elektrodynamiki kwantowej. Choć emisja spontaniczna wydaje się procesem zachodzącym „samoczynnie”, w rzeczywistości jest ona wywoływana przez oddziaływanie wzbudzonego atomu z kwantowymi fluktuacjami pola elektromagnetycznego w próżni.



absorpcja



emisja spontaniczna



emisja wymuszona

# Cząstka swobodna wg mechaniki kwantowej

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t),$$

gdzie  $A$  jest amplitudą funkcji,  $k$  jej liczbą falową, a  $\omega$  odpowiada częstotliwości kątowej. Wykorzystując wzór Eulera  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , możemy zapisać to równanie w następujący sposób

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{i\phi},$$

gdzie  $\phi$  to kąt fazowy. Jeżeli mamy do czynienia z funkcją wolnozmienną w przedziale  $\Delta x$ , prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jest równe

$$P(x, x + \Delta x) = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \Delta x = Ae^{i\phi} A^* e^{-i\phi} \Delta x = A^* A \Delta x.$$

Jeżeli  $A$  jest liczbą zespoloną ( $a + ib$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi rzeczywistymi), to

$$A^* A = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Zauważmy, że części urojone zniknęły. Tak więc

$$P(x, x + \Delta x) \approx |A|^2 \Delta x$$

ma wartość rzeczywistą. Interpretacja  $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$  jako gęstości prawdopodobieństwa daje pewność, że przewidywania mechaniki kwantowej są mierzalne w rzeczywistym świecie.

# Cząstka swobodna wg mechaniki kwantowej cd.

Funkcja falowa cząstki swobodnej:

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t), \quad \Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi \quad E = \frac{1}{\psi} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad *$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 \psi \quad p^2 = -\frac{1}{\psi} \hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad **$$

Cząstka w polu o energii  $U(x, t)$ ,  
Podstawiamy \* i \*\* do równania:

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$



Równanie Schrödingera zależne od czasu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Jeśli potencjał nie zależy od czasu:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et)} \Psi(x)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

# Stacjonarne równanie Schrödingera

Funkcję falową,  $\Psi$  dla danej cząstki, lub bardziej złożonego układu fizycznego, otrzymujemy rozwiązując równanie różniczkowe nazywane równaniem Schroedingera. Jeżeli energia potencjalna cząstki  $U$  nie zależy od czasu, to równanie Schrödingera jest równaniem niezależnym od czasu i nazywa się **stacjonarnym równaniem Schrödingera**.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

# Cząstka swobodna

Cząstka swobodna - na cząstkę nie działają żadne pola.  
Energia potencjalna cząstki  $U(x)=0$ .

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

Szukamy rozwiązania w postaci  $\Psi(x)=A\cos(kx) + iA \sin(kx)=Ae^{ikx}$

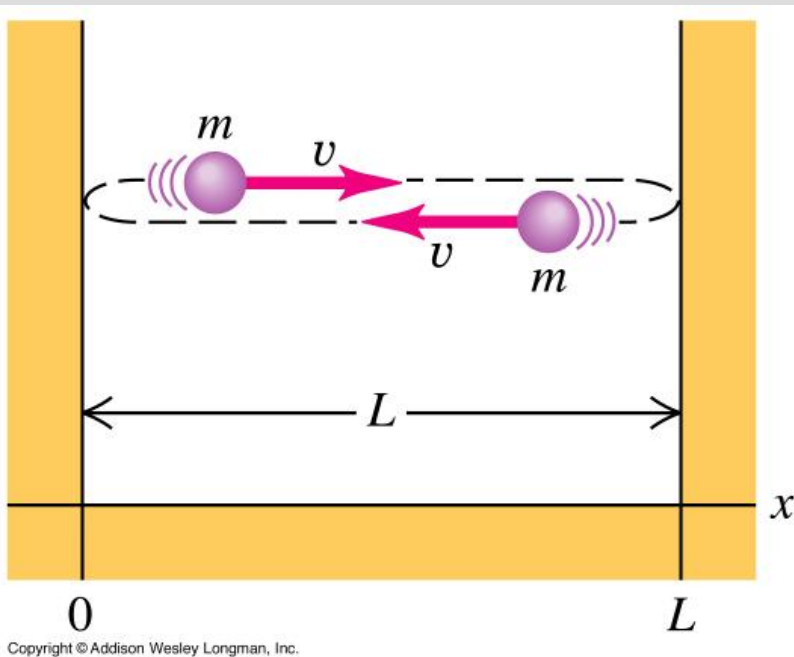
$$-\frac{\hbar^2}{2m} A(-k^2 e^{ikx}) = EAe^{ikx}$$

Funkcja ta będzie rozwiązaniem gdy:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

# Cząstka w studni potencjału

## 1. Przypadek klasyczny



Znajdująca się w głębokiej studni piłka może posiadać **dowolną** energię kinetyczną.

W szczególnym przypadku gdy znajduje się w spoczynku na dnie studni posiada energię całkowitą równą **zeru**.

# Drgająca struna

Fala stojąca powstaje gdy jest spełniony warunek:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

Długość fali stojącej jest skwantowana.

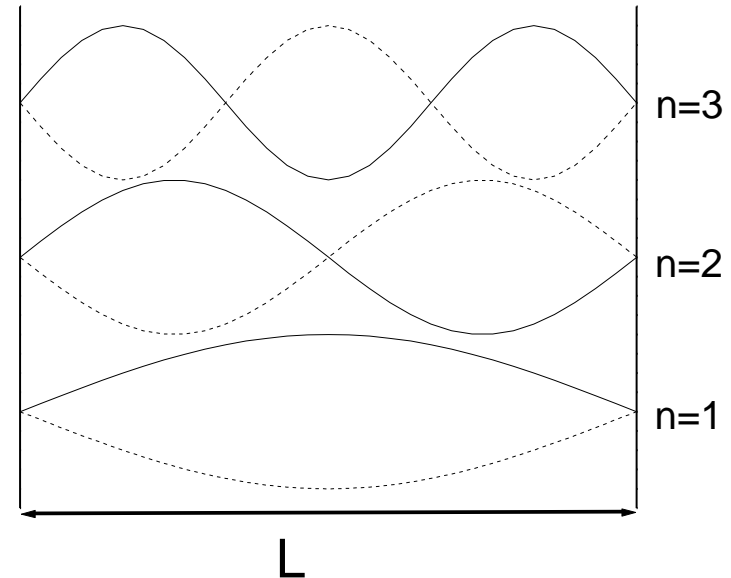
Falę stojącą opisuje równanie:

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos \omega t$$

$$y(x) = 2A \sin kx$$

Podstawiając  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2L/n} = \frac{\pi n}{L}$  otrzymujemy:

$$y(x) = 2A \sin \frac{\pi n}{L} x$$



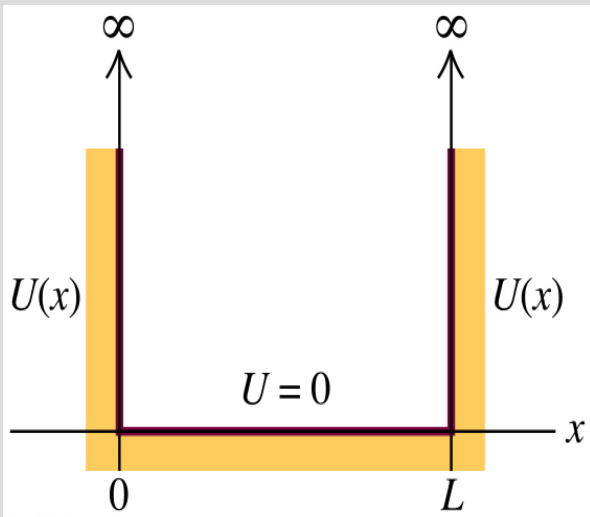
# Równanie fali stojącej

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega t + kx) \quad y_2(x, t) = -A \sin(\omega t - kx)$$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx) \\ &= (2A \sin kx) \cos \omega t \end{aligned}$$

# Cząstka w studni potencjału

## 2. Przypadek kwantowy



Energia potencjalna

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \\ 0 & \text{dla } x \in (0, L) \end{cases}$$

Warunki brzegowe:  $|\Psi(0)|^2 = |\Psi(L)|^2 = 0$

Równanie Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

# Cząstka w studni potencjału

W obszarze studni  $x \in (0, L)$  cząstka jest cząstką swobodną. Może poruszać się w prawo i w lewo. Szukamy więc rozwiązania w postaci fali stojącej  $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = C \sin(kx + \alpha)$

Warunek brzegowy dla  $x=0$  :  $|\Psi(0)|^2 = 0 \rightarrow \alpha = 0$

spełniony jest jedynie gdy  $\alpha = 0$

Warunek brzegowy dla  $x=L$  :  $|\Psi(L)|^2 = |C|^2 [\sin(k \cdot L)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy  $kL = n\pi$ .

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

skąd

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

# Cząstka w studni potencjału - wnioski

**Pytanie:** czy  $n$  może być równe zero?

Dla  $n=0$  energia  $k=0$  oraz  $\Psi(x)=C \sin(0 \cdot x)=0$ .  
Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym obszarze  $|\Psi(x)|^2 \Delta x = 0$

**Wniosek:** najmniejsza wartość  $n=1$ . Cząstka musi mieć energię różną od zera. Najmniejsza energia:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} 1^2$$

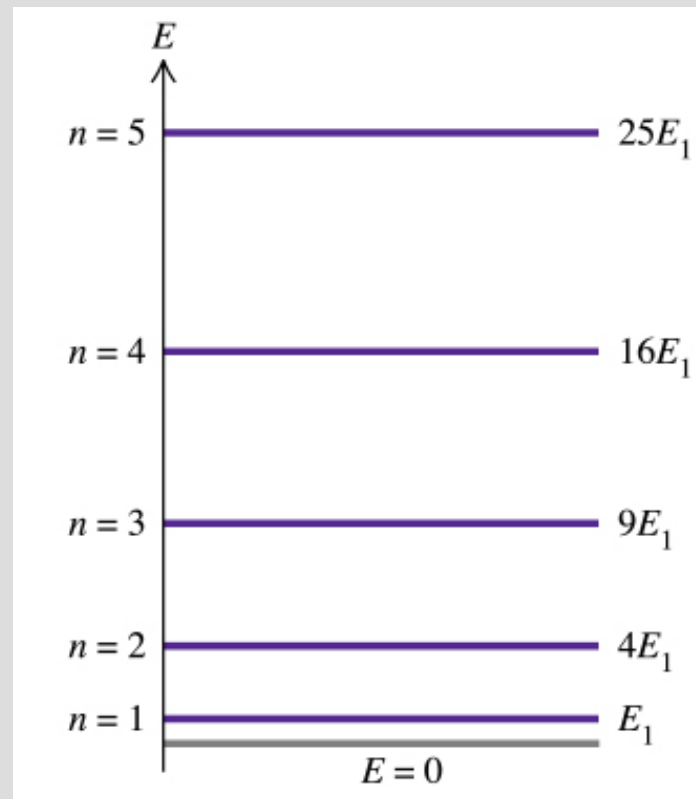
# Cząstka w studni potencjału -wnioski

W nieskończonej studni potencjału energia cząstki może przyjmować tylko pewne ściśle określone, różne od zera wartości:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

gdzie

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



# Cząstka w studni potencjału - wnioski

Funkcja falowa :

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n}{L} x$$

Warunek unormowania : cząstka musi się znajdować w obszarze 0-L:

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_0^L \left| A \sin \frac{\pi n}{L} x \right|^2 dx = 1 \quad 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

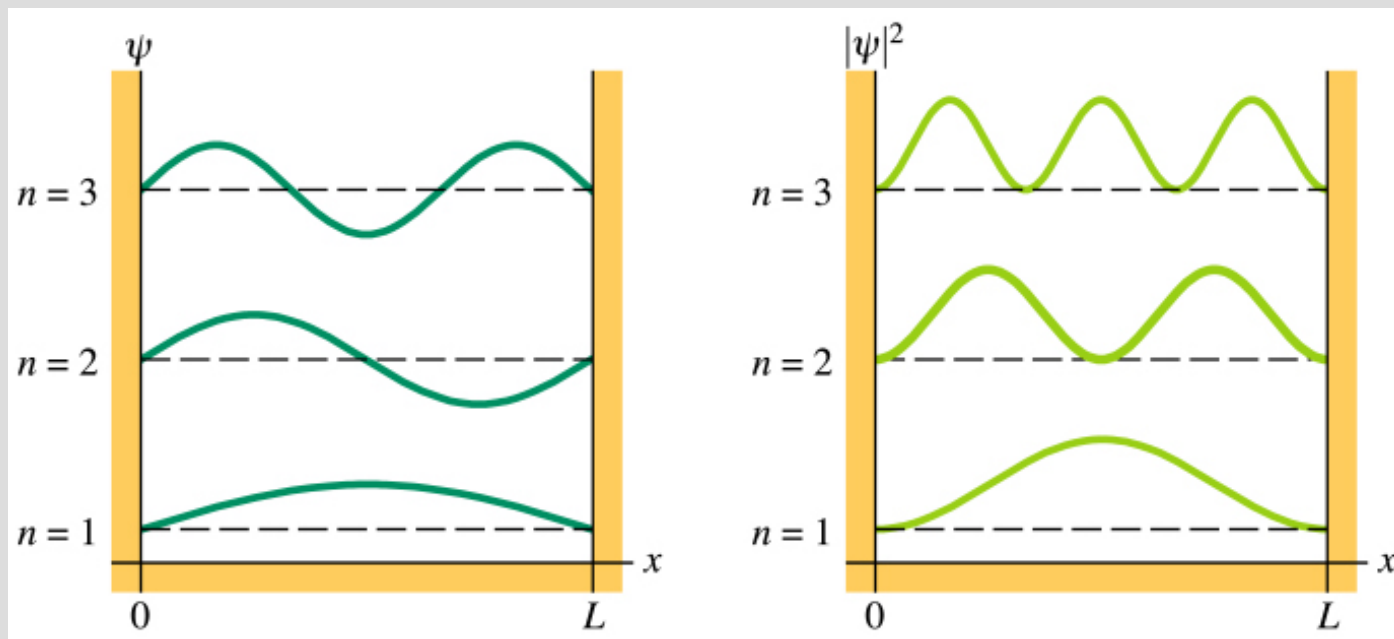
$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

# Cząstka w studni potencjału -wnioski

Funkcja falowa :

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.



# Cząstka w studni potencjału - wnioski

## Przykład 1

Pyłek o masie 1 g w studni o szerokości 1 cm

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 5.49 \cdot 10^{-61} \text{ J} = 3.43 \cdot 10^{-42} \text{ eV}$$

b) nr poziomu gdy porusza się z prędkością 3cm/s

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

$$E_n = n^2 E_1 \Rightarrow n = \sqrt{E_n / E_1} \cong 9 \cdot 10^{28}$$

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1)E_1 \approx 6.1 \cdot 10^{-13} \text{ eV}$$

# Cząstka w studni potencjału -wnioski

## Przykład 2

Elektron o masie  $9.11 \times 10^{-31}$  kg w studni o szerokości 0.2 nm.

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot (9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 1.51 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 9.42 \text{ eV}$$

b) poziomy drugi i trzeci

$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 37.7 \text{ eV}$$

$$E_3 = 9E_1 = 84.8 \text{ eV}$$

$$E_2 - E_1 = 28.28 \text{ eV}$$

# Kwantowanie energii

- Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych
- Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami*
- W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała

# Kwantowanie energii - oscylator harmoniczny

Energia potencjalna oscylatora harmonicznego:

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

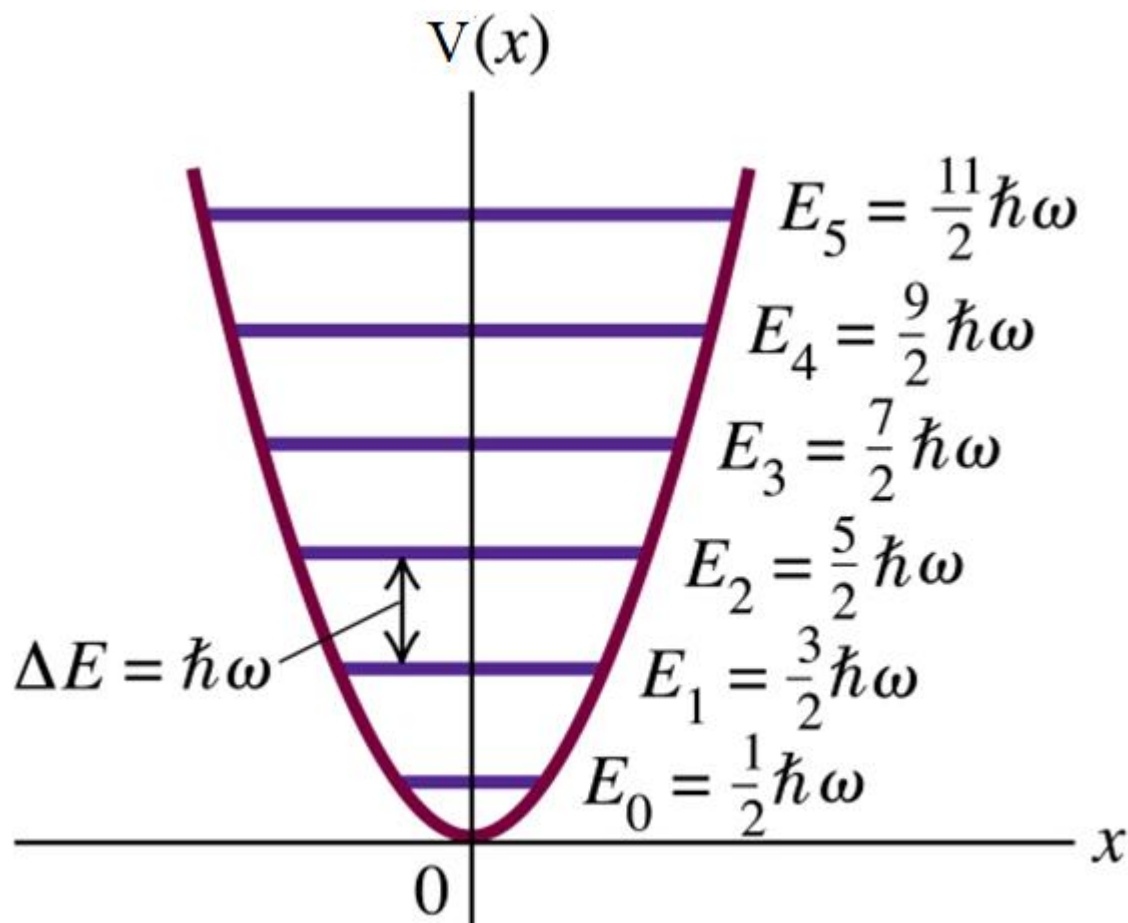
Równanie Schrödingera dla oscylatora :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \Psi = E\Psi$$

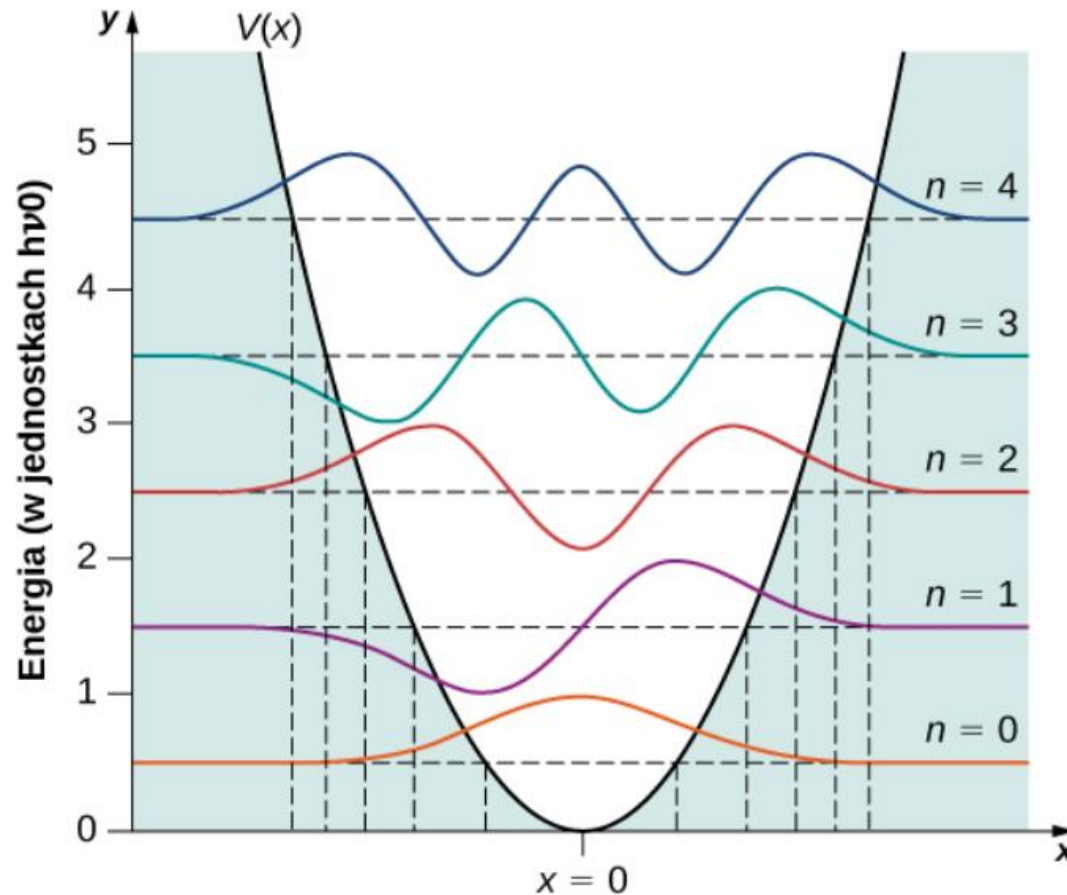
Funkcje falowe  $\Psi$  będące rozwiązaniem tego równania muszą być ciągłe i posiadać ciągłe pierwsze pochodne. Takie rozwiązania istnieją wyłącznie wtedy gdy energia całkowita oscylatora posiada jedną z wartości:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

# Oscylator harmoniczny kwantowy – dozwolone energie



# Oscylator harmoniczny kwantowy– funkcje falowe



**Ilustracja 7.15** Pierwsze pięć funkcji falowych kwantowego oscylatora harmonicznego. Klasyczne ograniczenia ruchu oscylatora oznaczone są pionowymi liniami odpowiadającymi maksymalnym wychyleniom klasycznego oscylatora  $x = \pm A$  o takiej samej energii jak kwantowy oscylator o stanie oznaczonym na rysunku.